



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 533.9, 532.5

MSC 2010: 76E25, 76E30

Нелинейная теория динамо

М. И. Копп, А. В. Тур, В. В. Яновский

С использованием асимптотического метода многих масштабов построена нелинейная теория возникновения крупномасштабных структур в стратифицированной проводящей среде при наличии мелкомасштабных осцилляций поля скорости и магнитных полей. Такие стационарные мелкомасштабные осцилляции поддерживаются малыми внешними источниками при малых числах Рейнольдса. Получена нелинейная система уравнений, описывающая эволюцию крупномасштабных структур поля скорости и магнитных полей. Линейная стадия эволюции приводит к известной неустойчивости. Рассмотрены стационарные крупномасштабные структуры, возникающие при стабилизации линейной неустойчивости.

Ключевые слова: стратифицированная проводящая среда, нелинейная система уравнений, неустойчивость, крупномасштабные структуры, метод многих масштабов

1. Введение

В природных явлениях наблюдается огромное разнообразие уединенных вихрей и крупномасштабных вихревых структур различных масштабов. Например, в атмосфере и океанах Земли это смерчи, торнадо, тайфуны, циклоны и антициклоны, в атмосферах пла-

Получено 30 декабря 2014 года
После доработки 16 февраля 2015 года

Копп Михаил Иосифович
michael.kopp@mail.ru
Яновский Владимир Владимирович
yanovsky@isc.kharkov.ua
Институт монокристаллов, НАН Украины
Украина, 61001, г. Харьков, пр. Ленина, д. 60
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
Украина, 61000, г. Харьков, пл. Свободы, д. 4

Тур Анатолий Валентинович
Anatoly.Tour@irap.omp.eu
Université de Toulouse [UPS], CNRS, Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie
9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France

нет — Большое пятно Юпитера и суперротация Венеры, солнечные протуберанцы, еще более крупные вихри во Вселенной — спиральные галактики [1–5]. Кроме природных явлений, вихревые структуры наблюдаются и в лабораторных условиях, например в установках по удержанию плазмы типа ТОКАМАК [6].

Под крупномасштабными вихревыми структурами будем понимать структуры, характерный масштаб которых намного превышает масштабы турбулентности или волн, под действием которых они возникают. Исследование механизмов генерации крупномасштабных вихревых структур мелкомасштабной турбулентностью является одним из перспективных направлений в развитии нелинейной физики. Здесь нужно отметить, что особую роль в процессах генерации крупномасштабных вихревых структур в атмосферах планет играет свободная конвекция или тепломассоперенос вещества в поле силы тяжести [7]. Возникновение крупномасштабных вихревых структур в конвективных системах изучалось как в рамках ламинарной теории [8, 9], так и в теории турбулентности [10–12]. Наибольшее развитие получила турбулентная теория (вихревое динамо), в которой показано существование крупномасштабной неустойчивости в конвективных системах с мелкомасштабной спиральной турбулентностью $\vec{v} \cdot \text{rot } \vec{v} \neq 0$ [10–12]. На основе численных [13] и аналитических [14] расчетов при рассмотрении вращающихся конвективных систем были предприняты попытки применения полученных результатов к теории возникновения тропических циклонов. Начало развития нелинейной теории генерации крупномасштабных структур было положено в работе [15], где использовался метод асимптотических многомасштабных разложений для малых чисел Рейнольдса R . В работе [15] было показано, что крупномасштабные вихревые структуры возникают вследствие нарушения отражательной инвариантности турбулентности (АКА-эффект). Нелинейная теория вихревого динамо на основе метода асимптотических разложений была разработана для сжимаемых сред [16, 17], конвективных сред со спиральной внешней силой [18–25]. Проведенный в [18, 19] анализ конвективной крупномасштабной неустойчивости приводит к генерации крупномасштабных вихревых структур, а на нелинейной стадии — к образованию спиральных вихревых солитонов или кинков нового типа.

Большое число замечательных результатов получено в рамках кинематической теории динамо в МГД. В этой постановке поле скорости жидкости считается заданным, а проблема сводится к выяснению свойств течения, вызывающего нарастание магнитных полей. В рамках этого подхода доказаны различные варианты теорем антидинамо, введено деление на быстрые и медленные динамо, выяснены топологические аспекты быстрого кинематического динамо. С этими и другими важными математическими результатами можно ознакомиться по книгам [20, 21] и обзорам [22–24].

В работе изучена нелинейная стадия крупномасштабной неустойчивости в стратифицированной электропроводящей среде с мелкомасштабной спиральной силой. Развита в работе [25] линейная теория справедлива лишь на начальном этапе развития крупномасштабной неустойчивости, когда величины крупномасштабных полей (магнитных и вихревых) еще малы. Поэтому здесь рассматривается нелинейная стадия развития крупномасштабной конвективной неустойчивости в стратифицированной электропроводящей среде. В качестве математического формализма использовался асимптотический метод многомасштабных разложений, который позволяет получить замкнутые нелинейные уравнения для крупномасштабных магнитных и гидродинамических полей. Показано, что для малых возмущений нелинейные уравнения преобразуются к уже известным уравнениям, описывающим гидродинамический и магнитный α -эффекты [26–36]. Проведенный в настоящей работе аналитический и численный анализ нелинейных уравнений в стационарном режиме показал существование локализованных вихревых структур и магнитных полей. Полученные в работе

результаты могут найти применение при решении ряда астрофизических и геофизических задач.

2. Основные уравнения и постановка задачи

Рассмотрим уравнения движения несжимаемой электропроводящей среды с постоянным градиентом температуры в приближении Буссинеска [6, 18]:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{\nabla P}{\rho_{00}} + \nu \Delta \vec{V} + \frac{1}{4\pi\rho_{00}} [\text{rot } \vec{B} \times \vec{B}] + g\beta T \vec{e} + \vec{F}_0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) T = \chi \Delta T - V_z A. \quad (2.2)$$

Вектор $\vec{e} = (0, 0, 1)$ — единичный вектор в направлении оси z , β — коэффициент теплового расширения, $A = \frac{dT_{00}}{dz}$ — постоянный градиент температуры, $A = \text{const}$, $A > 0$. Уравнения (2.1)–(2.2) нужно дополнить уравнениями для индукции магнитного поля \vec{B} и условиями соленоидальности полей \vec{V} и \vec{B} :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{V} \times \vec{B}] + \nu_m \Delta \vec{B}, \quad (2.3)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{div } \vec{V} = 0. \quad (2.4)$$

Здесь $\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ — коэффициент магнитной вязкости, σ — коэффициент электропроводности среды. Система уравнений (2.1)–(2.4) описывает эволюцию возмущений на фоне равновесного состояния, определяемого условием равновесия

$$\nabla P_{00} = \rho_{00} g \beta T_{00}, \quad (2.5)$$

где $\rho_{00} = \text{const}$, χ — коэффициент теплопроводности среды. Выбор таких необычных обозначений для равновесного состояния использован для избежания путаницы с обозначением асимптотических разложений далее.

В уравнение (2.1) включена внешняя сила \vec{F}_0 , обладающая следующим свойством:

$$\vec{F}_0 = f_0 \vec{F}_0 \left(\frac{x}{\lambda_0}; \frac{t}{t_0} \right), \quad \text{div } \vec{F}_0 = 0, \quad \vec{F}_0 \cdot \text{rot } \vec{F}_0 \neq 0, \quad (2.6)$$

где λ_0 характеризует масштаб, t_0 — характерное время, f_0 — характерная амплитуда. Основная роль этой силы — создание в среде мелкомасштабных спиральных флуктуаций поля скорости \vec{v}_0 с малым числом Рейнольдса $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$ или, другими словами, в поддержании стационарной мелкомасштабной спиральной турбулентности.

Легко заметить, что характерная скорость v_0 , вызванная внешней силой, имеет такие же характерные масштабы:

$$v_0 = v_0 \left(\frac{x}{\lambda_0}, \frac{t}{t_0} \right). \quad (2.7)$$

Теперь запишем систему уравнений (2.1)–(2.4) в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \vec{x} \rightarrow \frac{\vec{x}}{\lambda_0}, \quad t \rightarrow \frac{t}{t_0}, \quad \vec{v}_0 \rightarrow \frac{\vec{v}_0}{v_0}, \quad \vec{F}_0 \rightarrow \frac{\vec{F}_0}{f_0}, \quad P \rightarrow \frac{P}{\rho_{00} P_0}, \\ \vec{B} \rightarrow \frac{\vec{B}}{B_0}, \quad t_0 = \frac{\lambda_0^2}{\nu}, \quad P_0 = \frac{v_0 \nu}{\lambda_0^2}, \quad T \rightarrow \frac{T}{\lambda_0 A}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В этих переменных система уравнений (2.1)–(2.4) принимает вид

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + R (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \Delta \vec{V} + \widetilde{\text{Ra}} T \vec{e} + \tilde{Q} R [\text{rot } \vec{B} \times \vec{B}] + \vec{F}_0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \text{Pr}^{-1} \Delta T = -R (\vec{V} \nabla) T - V_z, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{Pm}^{-1} \Delta \vec{B} = R \text{rot} [\vec{V} \times \vec{B}]. \quad (2.11)$$

Здесь $\widetilde{\text{Ra}} = \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}}$, $\text{Ra} = \frac{g\beta A \lambda_0^4}{\nu \chi}$ — число Рэлея на масштабе λ_0 , $\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$ — число Прандтля, $\tilde{Q} = \frac{Q}{\text{Pm}}$, $Q = \frac{\sigma B_0^2 \lambda_0^2}{c^2 \rho_0 \nu}$ — число Чандрасекара на масштабе λ_0 , $\text{Pm} = \frac{\nu}{\nu_m}$ — магнитное число Прандтля, B_0 — характерное мелкомасштабное магнитное поле, которое считаем заданным («затравочное» магнитное поле [25]). Величина этих безразмерных чисел определяет условия, при которых происходит эволюция полей, входящих в систему уравнений (2.9)–(2.11).

Малым параметром асимптотического разложения будем считать число Рейнольдса R мелкомасштабной турбулентности. Малость остальных параметров не предполагается, и параметры Ra и Q не влияют на схему асимптотического разложения. Перейдем к следующей постановке задачи. Пусть внешняя сила F_0 будем спиральной, мелкомасштабной и высокочастотной. Такая сила вызывает мелкомасштабные флуктуации скорости и температуры на фоне равновесного состояния. Мелкомасштабные флуктуации магнитного поля генерируются механизмами нетурбулентного характера, например, с помощью термоэффектов [31, 32], развития плазменных неустойчивостей [32, 34] и т. д.; при усреднении быстро осциллирующие мелкомасштабные флуктуации дают нуль. Однако из-за нелинейного взаимодействия таких флуктуаций могут возникать члены, которые при усреднении не обращаются в нуль. Такие члены называются секулярными, и они будут условием разрешимости многомасштабного асимптотического разложения. Нахождение и исследование уравнений разрешимости, то есть замкнутых уравнений для крупномасштабных возмущений, и является основной задачей.

3. Многомасштабные асимптотические разложения

При построении многомасштабных асимптотических разложений будем следовать работам [12, 15]. Обозначим мелкомасштабные переменные $x_0 = (\vec{x}_0, t_0)$, а крупномасштабные $X = (\vec{X}, T)$. Производную $\frac{\partial}{\partial x_i^0}$ обозначим через ∂_i , а производную $\frac{\partial}{\partial t_0}$ — через ∂_t . Далее, крупномасштабные пространственные и временные производные будем обозначать следующим образом: $\frac{\partial}{\partial X_i} \equiv \nabla_i$, $\frac{\partial}{\partial T} \equiv \partial_T$. В соответствии с методом многих масштабов представим пространственные и временные производные в уравнениях (2.9)–(2.11) в виде производных по мелкомасштабным и крупномасштабным переменным:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \partial_i + R^2 \nabla_i, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \partial_t + R^4 \partial_T. \quad (3.2)$$

Поля \vec{v} , T , \vec{B} и P разложим в ряды по малому параметру R :

$$\begin{aligned}\vec{V}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{R}W_{-1}(X) + \vec{v}_0(x_0) + R\vec{v}_1 + R^2\vec{v}_2 + R^3\vec{v}_3 + \dots, \\ T(\vec{x}, t) &= \frac{1}{R}T_{-1}(X) + T_0(x_0) + RT_1 + R^2T_2 + R^3T_3 + \dots, \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{R}\vec{B}_{-1}(X) + \vec{B}_0(x_0) + R\vec{B}_1 + R^2\vec{B}_2 + R^3\vec{B}_3 + \dots, \\ P(\vec{x}, t) &= \frac{1}{R^3}P_{-3} + \frac{1}{R^2}P_{-2} + \frac{1}{R}P_{-1} + P_0 + R(P_1 + \overline{P}_1(X)) + R^2P_2 + R^3P_3 + \dots,\end{aligned}\quad (3.3)$$

где вклад P_1 зависит от мелкомасштабных переменных, а $\overline{P}_1(X)$ — только от крупномасштабных. Подставляя разложения (3.1)–(3.3) в систему уравнений (2.9)–(2.11) и собирая члены одинакового порядка по R до степени R^3 включительно, получаем систему уравнений многомасштабного асимптотического разложения. Основная проблема состоит в выделении из этих уравнений секулярных условий, которые и определяют динамику возмущений на крупных масштабах.

Приведем алгебраическую структуру асимптотического разложения в различных порядках по R , начиная с наименьшего. Так, в порядке R^{-3} имеется только уравнение

$$\partial_i P_{-3} = 0 \implies P_{-3} = P_{-3}(X). \quad (3.4)$$

В порядке R^{-2} появляется уравнение

$$\partial_i P_{-2} = 0 \implies P_{-2} = P_{-2}(X). \quad (3.5)$$

Следствием этих уравнений является отсутствие зависимости вкладов в давление P_{-3} и P_{-2} от быстрых переменных. В порядке R^{-1} получаем более сложную систему уравнений:

$$\partial_t W_{-1}^i + W_{-1}^k \partial_k W_{-1}^i = -\partial_i P_{-1} - \nabla_i P_{-3} + \partial_k^2 W_{-1}^i + \widetilde{\text{Ra}} e_i T_{-1} + \widetilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \partial_m B_{-1}^l B_{-1}^k, \quad (3.6)$$

$$\partial_t B_{-1}^i - \text{Pm}^{-1} \partial_k^2 B_{-1}^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \partial_j W_{-1}^n B_{-1}^p, \quad (3.7)$$

$$\partial_t T_{-1} - \text{Pr}^{-1} \partial_k^2 T_{-1} = -W_{-1}^k \partial_k T_{-1} - W_{-1}^z, \quad (3.8)$$

$$\partial_i W_{-1}^i = 0, \quad \partial_i B_{-1}^i = 0. \quad (3.9)$$

Усреднение уравнений (3.6)–(3.9) по быстрым переменным дает секулярные уравнения:

$$-\nabla_i P_{-3} + \widetilde{\text{Ra}} e_i T_{-1} = 0, \quad (3.10)$$

$$W_{-1}^z = 0. \quad (3.11)$$

В нулевом порядке по R имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\partial_t v_0^i + W_{-1}^k \partial_k v_0^i + v_0^k \partial_k W_{-1}^i &= -\partial_i P_0 - \nabla_i P_{-2} + \partial_k^2 v_0^i + \widetilde{\text{Ra}} e_i T_0 + \\ &+ \widetilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \left(\partial_m B_{-1}^l B_0^k + \partial_m B_0^l B_{-1}^k \right) + F_0^i,\end{aligned}\quad (3.12)$$

$$\partial_t B_0^i - \text{Pm}^{-1} \partial_k^2 B_0^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \left(\partial_j W_{-1}^n B_0^p + \partial_j v_0^n B_{-1}^p \right), \quad (3.13)$$

$$\partial_t T_0 - \text{Pr}^{-1} \partial_k^2 T_0 = -W_{-1}^k \partial_k T_0 - v_0^k T_{-1} - v_0^z, \quad (3.14)$$

$$\partial_i v_0^i = 0, \quad \partial_i B_0^i = 0. \quad (3.15)$$

Эти уравнения дают один секулярный член:

$$\nabla P_{-2} = 0 \quad \implies \quad P_{-2} = \text{const.} \quad (3.16)$$

Рассмотрим приближение первого порядка R^1 :

$$\begin{aligned} \partial_t v_1^i + W_{-1}^k \partial_k v_1^i + v_0^k \partial_k v_0^i + v_1^k \partial_k W_{-1}^i + W_{-1}^k \nabla_k W_{-1}^i = -\nabla_i P_{-1} - \partial_i (P_1 + \bar{P}_1) + \partial_k^2 v_1^i + \\ + 2\partial_k \nabla_k W_{-1}^i + \widetilde{\text{Ra}} e_i T_1 + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} (\partial_m B_{-1}^l B_1^k + \partial_m B_0^l B_0^k + \partial_m B_1^l B_{-1}^k + \nabla_m B_{-1}^l B_{-1}^k), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \partial_t B_1^i - \text{Pm}^{-1} \partial_k^2 B_1^i - \text{Pm}^{-1} 2\partial_k \nabla_k B_{-1}^i = \\ = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} (\partial_j W_{-1}^n B_1^p + \partial_j v_0^n B_0^p + \partial_j v_1^n B_{-1}^p + \nabla_j W_{-1}^n B_{-1}^p), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\partial_t T_1 - \text{Pr}^{-1} \partial_k^2 T_1 - 2\partial_k \nabla_k T_{-1} = -W_{-1}^k \partial_k T_1 - W_{-1}^k \nabla_k T_{-1} - v_0^k \partial_k T_0 - v_1^k \partial_k T_{-1} - v_1^z, \quad (3.19)$$

$$\partial_i v_1^i + \nabla_i W_{-1}^i = 0, \quad \partial_i B_1^i + \nabla_i B_{-1}^i = 0. \quad (3.20)$$

Из этой системы уравнений следуют секулярные уравнения

$$W_{-1}^k \nabla_k W_{-1}^i = -\nabla_i P_{-1} + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \nabla_m B_{-1}^l B_{-1}^k, \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \nabla_j W_{-1}^n B_{-1}^p = 0, \quad (3.22)$$

$$W_{-1}^k \nabla_k T_{-1} = 0, \quad (3.23)$$

$$\nabla_i W_{-1}^i = 0, \quad \nabla_i B_{-1}^i = 0. \quad (3.24)$$

Отсюда следует, что секулярные уравнения (3.21)–(3.24) удовлетворяют следующей геометрии полей:

$$\begin{aligned} \vec{W}_{-1} = (W_x(Z), W_y(Z), 0), \\ \vec{B}_{-1} = (B_{-1}^x(Z), B_{-1}^y(Z), 0), \quad T_{-1} = T_{-1}(Z), \quad P_{-1} = \text{const.} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Для второго порядка R^2 получим уравнения

$$\begin{aligned} \partial_t v_2^i + W_{-1}^k \partial_k v_2^i + v_0^k \partial_k v_1^i + W_{-1}^k \nabla_k v_0^i + v_0^k \nabla_k W_{-1}^i + v_1^k \partial_k v_0^i + v_2^k \partial_k W_{-1}^i = \\ = -\nabla_i P_2 - \nabla_i P_0 + \partial_k^2 v_2^i + 2\partial_k \nabla_k v_0^i + \widetilde{\text{Ra}} e_i T_2 + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \left(\partial_m B_{-1}^l B_2^k + \partial_m B_0^l B_1^k + \right. \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \left. + \partial_m B_1^l B_0^k + \partial_m B_2^l B_{-1}^k + \nabla_m B_{-1}^l B_0^k + \nabla_m B_0^l B_{-1}^k \right), \\ \partial_t B_2^i - \text{Pm}^{-1} \partial_k^2 B_2^i - \text{Pm}^{-1} 2\partial_k \nabla_k B_0^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} (\partial_j W_{-1}^n B_2^p + \partial_j v_0^n B_1^p + \partial_j v_1^n B_0^p + \\ + \partial_j v_2^n B_{-1}^p + \nabla_j W_{-1}^n B_0^p + \nabla_j v_0^n B_{-1}^p), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \partial_t T_2 - \text{Pr}^{-1} \partial_k^2 T_2 - \text{Pr}^{-1} 2\partial_k \nabla_k T_0 = -W_{-1}^k \partial_k T_2 - W_{-1}^k \nabla_k T_0 - v_0^k \partial_k T_1 - v_0^k \nabla_k T_{-1} - \\ - v_1^k \partial_k T_0 - v_2^k \partial_k T_{-1} - v_2^z, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\partial_i v_2^i + \nabla_i v_0^i = 0, \quad B_2^i + \nabla_i B_0^i = 0. \quad (3.29)$$

После усреднения системы уравнений (3.26)–(3.29) по быстрым переменным видно, что в порядке R^2 секулярных членов нет.

Наконец, приходим к наиболее важному порядку R^3 . В этом порядке уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_t v_3^i + \partial_t W_{-1}^i + W_{-1}^k \partial_k v_3^i + v_0^k \partial_k v_2^i + \\ + W_{-1}^k \nabla_k v_1^i + v_0^k \nabla_k v_0^i + v_1^k \partial_k v_1^i + v_2^k \nabla_k v_0^i + v_1^k \nabla_k W_{-1}^i + v_3^k \partial_k W_{-1}^i = \\ = -\partial_i P_3 - \nabla_i (P_1 + \bar{P}_1) + \partial_k^2 v_3^i + 2\partial_k \nabla_k v_1^i + \Delta W_{-1}^i + \widetilde{\text{Ra}} e_i T_3 + \\ + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} \left(\partial_m B_{-1}^l B_3^k + \partial_m B_0^l B_2^k + \partial_m B_1^l B_1^k + \partial_m B_2^l B_0^k + \nabla_m B_{-1}^l B_1^k + \nabla_m B_0^l B_0^k \right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \partial_t B_3^i + \partial_T B_{-1}^i - \text{Pm}^{-1} \partial_k^2 B_3^i - \text{Pm}^{-1} 2 \partial_k \nabla_k B_1^i - \text{Pm}^{-1} \Delta B_{-1}^i = \\ = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} (\partial_j W_{-1}^n B_3^p + \partial_j v_0^n B_2^p + \partial_j v_1^n B_1^p + \partial_j v_2^n B_0^p + \nabla_j W_{-1}^n B_1^p + \nabla_j v_0^n B_0^p), \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \partial_t T_3 + \partial_T T_{-1} - \text{Pr}^{-1} \partial_k^2 T_3 - \text{Pr}^{-1} 2 \partial_k \nabla_k T_1 - \text{Pr}^{-1} \Delta T_{-1} = -W_{-1}^k \partial_k T_3 - W_{-1}^k \nabla_k T_1 - \\ - v_0^k \partial_k T_2 - v_0^k \nabla_k T_0 - v_1^k \partial_k T_1 - v_1^k \nabla_k T_{-1} - v_2^k \partial_k T_0 - v_3^k \partial_k T_{-1} - v_3^z, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\partial_i v_3^i + \nabla_i v_1^i = 0, \quad \partial_i B_3^i + \nabla_i B_1^i = 0. \quad (3.33)$$

Усредняя эту систему уравнений по быстрым переменным, получим основные секулярные уравнения, описывающие эволюцию крупномасштабных возмущений:

$$\partial_t W_{-1}^i - \Delta W_{-1}^i + \nabla_k (\overline{v_0^k v_0^i}) = -\nabla_i \overline{P_1} + \tilde{Q} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} (\overline{\nabla_m B_0^l B_0^k}), \quad (3.34)$$

$$\partial_t B_{-1}^i - \text{Pm}^{-1} \Delta B_{-1}^i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} \nabla_j (\overline{v_0^n B_0^p}), \quad (3.35)$$

$$\partial_t T_{-1} - \text{Pr}^{-1} \Delta T_{-1} = -\nabla_k (\overline{v_0^k T_0}). \quad (3.36)$$

Используя известные формулы для свертки тензоров $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jml} = \delta_{km} \delta_{il} - \delta_{im} \delta_{kl}$, $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knp} = \delta_{in} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{jn}$ и вводя для удобства обозначения $\vec{W} = \vec{W}_{-1}$, $\vec{H} = \vec{B}_{-1}$, $\Theta = T_{-1}$, запишем систему уравнений (3.34)–(3.36) в следующем виде:

$$\partial_T W_i - \Delta W_i + \nabla_k (\overline{v_0^k v_0^i}) = -\nabla_i \overline{P} + \tilde{Q} \left(\nabla_k (\overline{B_0^i B_0^k}) - \frac{\nabla_i}{2} (\overline{B_0^k})^2 \right), \quad (3.37)$$

$$\partial_T H_i - \text{Pm}^{-1} \Delta H_i = \nabla_j (\overline{v_0^i B_0^j}) - \nabla_n (\overline{v_0^n B_0^i}), \quad (3.38)$$

$$\partial_T \Theta - \text{Pr}^{-1} \Delta \Theta + \nabla_k (\overline{v_0^k T_0}) = 0. \quad (3.39)$$

Уравнения (3.37)–(3.39) дополняются секулярными уравнениями (3.10)–(3.11), (3.21)–(3.24) в виде

$$\nabla_k (W_k W_i) = -\nabla_i \overline{P}_{-1} + \tilde{Q} (\nabla_k H_i - \nabla_i H_k) H_k, \quad (3.40)$$

$$\nabla_k (W_k \Theta) = 0, \quad (3.41)$$

$$W_j \nabla_j H_i = H_j \nabla_j W_i,$$

$$\nabla_i W_i = 0, \quad \nabla_i H_i = 0, \quad W_z = 0.$$

Окончательно, с учетом геометрии задачи (3.25), уравнения для крупномасштабных возмущений примут вид

$$\begin{aligned} \partial_T W_x - \Delta W_x + \nabla_z (\overline{v_0^z v_0^x}) &= \tilde{Q} \nabla_z (\overline{B_0^z B_0^x}), \\ \partial_T W_y - \Delta W_y + \nabla_z (\overline{v_0^z v_0^y}) &= \tilde{Q} \nabla_z (\overline{B_0^z B_0^y}), \\ \partial_T H_x - \text{Pm}^{-1} \Delta H_x &= \nabla_z (\overline{v_0^x B_0^z}) - \nabla_z (\overline{v_0^z B_0^x}), \\ \partial_T H_y - \text{Pm}^{-1} \Delta H_y &= \nabla_z (\overline{v_0^y B_0^z}) - \nabla_z (\overline{v_0^z B_0^y}), \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\partial_T \Theta - \text{Pr}^{-1} \Delta \Theta + \nabla_z (\overline{v_0^z T_0}) = 0, \quad (3.43)$$

$$\widetilde{\text{Ra}} \Theta e_z = \nabla_z P_{-3}, \quad \frac{\partial}{\partial Z} \gg \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}.$$

Таким образом, для получения замкнутой системы уравнений, описывающей эволюцию крупномасштабных полей \vec{W} и \vec{H} , потребовалось дойти до третьего порядка теории возмущения. Это довольно характерное явление при применении метода многомасштабных разложений. Окончательное замыкание достигается после вычисления корреляционных функций: напряжений Рейнольдса $\nabla_k \left(\overline{v_0^k v_0^i} \right)$, корреляторов магнитного поля $\nabla_k \left(\overline{B_0^i B_0^k} \right)$ и смешанных корреляторов $\nabla_j \left(\overline{v_0^i B_0^j} \right)$, $\nabla_n \left(\overline{v_0^n B_0^i} \right)$. Их вычисление легко осуществить, используя решения ранее полученных уравнений для мелкомасштабных полей в нулевом порядке по R .

4. Вычисление мелкомасштабных полей в нулевом порядке R

Для вычисления соответствующих корреляционных функций и достижения замыкания уравнений крупномасштабных полей обсудим более детально мелкомасштабные поля. В этом разделе найдем мелкомасштабные поля в нулевом порядке теории возмущения. Рассмотрим уравнения (3.12)–(3.15), полученные в нулевом порядке по R . Введем более компактные обозначения для операторов:

$$\hat{D}_W = \partial_t - \partial^2 + W^k \partial_k, \quad \hat{D}_H = \partial_t - \text{Pr}^{-1} \partial^2 + W^k \partial_k, \quad \hat{D}_\theta = \partial_t - \text{Pr}^{-1} \partial^2 + W^k \partial_k; \quad (4.1)$$

в результате система (3.12)–(3.15) примет вид

$$\hat{D}_W v_0^i = -\partial_i P_0 + \widetilde{\text{Ra}} e_i T_0 + \tilde{Q} H_k \left(\partial_k B_0^i - \partial_i B_0^k \right) + F_0^i, \quad (4.2)$$

$$\hat{D}_H B_0^i = H_p \partial_p v_0^i, \quad (4.3)$$

$$\hat{D}_\theta T_0 = -e_k v_0^k, \quad (4.4)$$

$$\partial_i v_0^i = \partial_k B_0^k = 0. \quad (4.5)$$

Отсюда нетрудно найти выражения для мелкомасштабного поля \vec{B}_0 и температуры T_0 :

$$B_0^i = \frac{H_p \partial_p v_0^i}{\hat{D}_H}, \quad T_0 = -\frac{e_k v_0^k}{\hat{D}_\theta}. \quad (4.6)$$

Подставим (4.6) в уравнение (4.2), затем продифференцируем получившееся выражение по ∂_i , используя условия соленоидальности полей (4.5); мы получим выражение для давления P_0 :

$$P_0 = -\frac{\widetilde{\text{Ra}} e_i e_k \partial_i v_0^k}{\partial^2 \hat{D}_\theta} - \frac{\tilde{Q}}{\partial^2 \hat{D}_H} (H_p \partial_p) (H_k \partial^2 v_0^k). \quad (4.7)$$

Исключая давление P_0 в (4.2), мы получим уравнение для v_0^k :

$$\left(\delta_{ik} + \frac{\widetilde{\text{Ra}}}{\hat{q} \hat{D}_W \hat{D}_\theta} \hat{P}_{ip} e_p e_k \right) v_0^k = \frac{F_0^i}{\hat{q} \hat{D}_W}, \quad (4.8)$$

где $\hat{P}_{ip} = \delta_{ip} - \frac{\partial_i \partial_p}{\partial^2}$ — проекционный оператор,

$$\hat{q} = 1 - \frac{\tilde{Q} (H_k \partial_k)^2}{\hat{D}_W \hat{D}_H}.$$

Перепишем (4.8) в более компактном виде:

$$\widehat{L}_{ik}v_0^k = \frac{F_0^i}{\widehat{q}\widehat{D}_W}, \quad (4.9)$$

где использовано обозначение для оператора

$$\widehat{L}_{ik} = \delta_{ik} + \frac{\widetilde{\text{Ra}}\widehat{P}_{ip}e_pe_k}{\widehat{q}\widehat{D}_W\widehat{D}_\theta}. \quad (4.10)$$

Из (4.9) легко найти поле скорости v_0^k непосредственно через обратный оператор \widehat{L}_{kj}^{-1} , то есть

$$v_0^k = L_{kj}^{-1} \frac{F_0^j}{\widehat{q}\widehat{D}_W}, \quad (4.11)$$

где \widehat{L}_{kj}^{-1} обладает свойством $\widehat{L}_{ik}\widehat{L}_{kj}^{-1} = \delta_{ij}$ и имеет вид

$$\widehat{L}_{kj}^{-1} = \delta_{kj} - \frac{\widetilde{\text{Ra}}\widehat{P}_{kn}e_ne_j}{\widehat{q}\widehat{D}_W\widehat{D}_\theta + \widetilde{\text{Ra}}\widehat{P}_{qp}e_qe_p}. \quad (4.12)$$

Выражение для мелкомасштабных пульсаций скорости v_0^k примет форму

$$v_0^k = \left[\delta_{kj} - \frac{\widetilde{\text{Ra}}\widehat{P}_{kn}e_ne_j}{\widehat{q}\widehat{D}_W\widehat{D}_\theta + \widetilde{\text{Ra}}\widehat{P}_{qp}e_qe_p} \right] \frac{F_0^j}{\widehat{q}\widehat{D}_W}. \quad (4.13)$$

Мелкомасштабные пульсации температуры T_0 выражаются через $\vec{v}_0(\vec{F}_0)$:

$$T_0 = - \left[1 - \frac{\widetilde{\text{Ra}}\widehat{P}_{kn}e_ke_n}{\widehat{q}\widehat{D}_W\widehat{D}_\theta + \widetilde{\text{Ra}}\widehat{P}_{qp}e_qe_p} \right] \frac{(\vec{e}\vec{F}_0)}{\widehat{q}\widehat{D}_W\widehat{D}_\theta}. \quad (4.14)$$

Формулы (4.13)–(4.14) в пределе $\text{Pr} = 1$ и $\sigma = 0$ (неэлектропроводная среда) полностью совпадают с результатами работ [4, 12, 13]. Далее нам необходимо знать явный вид для мелкомасштабных пульсаций магнитного поля \vec{B}_0 :

$$B_0^k = \left[\delta_{kj} - \frac{\widetilde{\text{Ra}}\widehat{P}_{kn}e_ne_j}{\widehat{q}\widehat{D}_W\widehat{D}_\theta + \widetilde{\text{Ra}}\widehat{P}_{qp}e_qe_p} \right] \frac{H_p\partial_p F_0^j}{\widehat{q}D_W D_H}. \quad (4.15)$$

Для дальнейших вычислений корреляторов нам необходимо явно задать внешнюю спиральную силу \vec{F}_0 детерминированным образом в виде:

$$\vec{F}_0 = f_0 \left[\vec{i} \cos \varphi_2 + \vec{j} \sin \varphi_1 + \vec{k}(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \right], \quad (4.16)$$

где $\varphi_1 = \vec{\kappa}_1 \vec{x} - \omega_0 t$, $\varphi_2 = \vec{\kappa}_2 \vec{x} - \omega_0 t$, $\kappa_1 = \kappa_0(1, 0, 0)$, $\kappa_2 = \kappa_0(0, 1, 0)$. Тогда спиральность внешней силы будет равна

$$\vec{F}_0 \text{ rot } \vec{F}_0 = \kappa_0 \vec{F}_0^2 \neq 0. \quad (4.17)$$

Формулу (4.16) удобно переписать в комплексной форме:

$$\vec{F}_0 = \vec{A}e^{i\varphi_1} + \vec{A}^*e^{-i\varphi_1} + \vec{B}e^{i\varphi_2} + \vec{B}^*e^{-i\varphi_2}, \quad (4.18)$$

где векторы \vec{A} и \vec{B} имеют вид

$$\vec{A} = \frac{f_0}{2}(\vec{k} - i\vec{j}), \quad \vec{A}^* = \frac{f_0}{2}(\vec{k} + i\vec{j}), \quad \vec{B} = \frac{f_0}{2}(\vec{i} - i\vec{k}), \quad \vec{B}^* = \frac{f_0}{2}(\vec{i} + i\vec{k}). \quad (4.19)$$

Действие операторов \hat{q} , \hat{D}_W , \hat{D}_H , \hat{D}_θ на собственные функции $\exp(i\omega t + i\vec{\kappa}\vec{x})$, очевидно, имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{q}(\omega, \vec{\kappa}) \exp(i\vec{\kappa}\vec{x} + i\omega t), & \quad \hat{D}_W(\omega, \vec{\kappa}) \exp(i\vec{\kappa}\vec{x} + i\omega t), \\ \hat{D}_H(\omega, \vec{\kappa}) \exp(i\vec{\kappa}\vec{x} + i\omega t), & \quad \hat{D}_\theta(\omega, \vec{\kappa}) \exp(i\vec{\kappa}\vec{x} + i\omega t), \end{aligned}$$

где $\hat{q}(\omega, \vec{\kappa})$, $\hat{D}_W(\omega, \vec{\kappa})$, $\hat{D}_H(\omega, \vec{\kappa})$, $\hat{D}_\theta(\omega, \vec{\kappa})$ имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{q}(\omega, \vec{\kappa}) &= 1 + \frac{\tilde{Q}(\vec{\kappa}\vec{H})^2}{\hat{D}_W(\omega, \vec{\kappa})\hat{D}_H(\omega, \vec{\kappa})}, \\ \hat{D}_W(\omega, \vec{\kappa}) &= i(\omega + \vec{\kappa}\vec{W}) + \kappa^2, \\ \hat{D}_H(\omega, \vec{\kappa}) &= i(\omega + \vec{\kappa}\vec{W}) + \kappa^2 \text{Pm}^{-1}, \\ \hat{D}_\theta(\omega, \vec{\kappa}) &= i(\omega + \vec{\kappa}\vec{W}) + \kappa^2 \text{Pr}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Выпишем ряд полезных соотношений, полагая для простоты $\kappa_0 = 1$ и $\omega_0 = 1$:

$$\begin{aligned} \hat{D}_W(\omega_0, -\vec{\kappa}_1) &= i(1 - W_1) + 1 = \hat{D}_{W_1}, \\ \hat{D}_W(\omega_0, -\vec{\kappa}_1) &= \hat{D}_{W_1}^*, \quad \hat{D}_H(\omega_0, -\vec{\kappa}_1) = i(1 - W_1) + \text{Pm}^{-1} = \hat{D}_{H_1}, \\ \hat{D}_H(\omega_0, -\vec{\kappa}_1) &= \hat{D}_{H_1}^*, \quad \hat{D}_\theta(\omega_0, -\vec{\kappa}_1) = i(1 - W_1) + \text{Pr}^{-1} = \hat{D}_{\theta_1}, \quad \hat{D}_\theta(\omega_0, -\vec{\kappa}_1) = \hat{D}_{\theta_1}^*, \\ \hat{q}(\omega_0, -\vec{\kappa}_1) &= 1 + \frac{\tilde{Q}H_1^2}{(i(1 - W_1) + 1)(i(1 - W_1) + \text{Pm}^{-1})} = \hat{q}_1, \\ \hat{q}(-\omega_0, \vec{\kappa}_1) &= \hat{q}_1^*, \quad H_1 = H_x, \quad W_1 = W_x. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Аналогично для вектора $\vec{\kappa}_2$ получаем

$$\begin{aligned} \hat{D}_W(\omega_0, -\vec{\kappa}_2) &= i(1 - W_2) + 1 = \hat{D}_{W_2}, \quad \hat{D}_W(\omega_0, -\vec{\kappa}_2) = \hat{D}_{W_2}^*, \\ \hat{D}_H(\omega_0, -\vec{\kappa}_2) &= i(1 - W_2) + \text{Pm}^{-1} = \hat{D}_{H_2}, \quad \hat{D}_H(\omega_0, -\vec{\kappa}_2) = \hat{D}_{H_2}^*, \\ \hat{D}_\theta(\omega_0, -\vec{\kappa}_2) &= i(1 - W_2) + \text{Pr}^{-1} = \hat{D}_{\theta_2}, \quad \hat{D}_\theta(\omega_0, -\vec{\kappa}_2) = \hat{D}_{\theta_2}^*, \\ \hat{q}(\omega_0, -\vec{\kappa}_2) &= 1 + \frac{\tilde{Q}H_2^2}{(i(1 - W_2) + 1)(i(1 - W_2) + \text{Pm}^{-1})} = \hat{q}_2, \\ \hat{q}(-\omega_0, \vec{\kappa}_2) &= \hat{q}_2^*, \quad H_2 = H_y, \quad W_2 = W_y. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Согласно представлению для внешней силы \vec{F}_0 (4.18), мелкомасштабные поля \vec{v}_0 , \vec{B}_0 , T_0 , определяемые формулами (4.13)–(4.15), состоят каждый из четырех членов:

$$\begin{aligned} v_0^k &= v_{01}^k + v_{02}^k + v_{03}^k + v_{04}^k, \\ B_0^i &= B_{01}^i + B_{02}^i + B_{03}^i + B_{04}^i, \quad T_0 = T_{01} + T_{02} + T_{03} + T_{04}; \end{aligned} \quad (4.23)$$

здесь $v_{02}^k = (v_{01}^k)^*$, $v_{04}^k = (v_{03}^k)^*$, $B_{02}^k = (B_{01}^k)^*$, $B_{04}^k = (B_{03}^k)^*$, $T_{02} = (T_{01})^*$, $T_{04} = (T_{03})^*$,

$$v_{01}^k = e^{i\varphi_1} \left[\delta_{kj} - \frac{\widetilde{\text{Ra}} \widehat{P}_{kn} e_n e_j}{\widehat{q}_1^* \widehat{D}_{W_1}^* \widehat{D}_{\theta_1}^* + \widetilde{\text{Ra}}} \right] \frac{A_j}{\widehat{q}_1^* \widehat{D}_{W_1}^*}, \quad (4.24)$$

$$v_{03}^k = e^{i\varphi_2} \left[\delta_{kj} - \frac{\widetilde{\text{Ra}} \widehat{P}_{kn} e_n e_j}{\widehat{q}_2^* \widehat{D}_{W_2}^* \widehat{D}_{\theta_2}^* + \widetilde{\text{Ra}}} \right] \frac{B_j}{\widehat{q}_2^* \widehat{D}_{W_2}^*}, \quad (4.25)$$

$$T_{01} = -e^{i\varphi_1} \left[1 - \frac{\widetilde{\text{Ra}} \widehat{P}_{kn} e_n e_k}{\widehat{q}_1^* \widehat{D}_{W_1}^* \widehat{D}_{\theta_1}^* + \widetilde{\text{Ra}}} \right] \frac{(\vec{e}\vec{A})}{\widehat{q}_1^* \widehat{D}_{W_1}^* \widehat{D}_{\theta_1}^*}, \quad (4.26)$$

$$T_{03} = -e^{i\varphi_2} \left[1 - \frac{\widetilde{\text{Ra}} \widehat{P}_{kn} e_n e_k}{\widehat{q}_2^* \widehat{D}_{W_2}^* \widehat{D}_{\theta_2}^* + \widetilde{\text{Ra}}} \right] \frac{(\vec{e}\vec{B})}{\widehat{q}_2^* \widehat{D}_{W_2}^* \widehat{D}_{\theta_2}^*}, \quad (4.27)$$

$$B_{01}^k = e^{i\varphi_1} \left[\delta_{kj} - \frac{\widetilde{\text{Ra}} \widehat{P}_{kn} e_n e_j}{\widehat{q}_1^* \widehat{D}_{W_1}^* \widehat{D}_{\theta_1}^* + \widetilde{\text{Ra}}} \right] \frac{iH_1 A_j}{\widehat{q}_1^* \widehat{D}_{W_1}^* \widehat{D}_{H_1}^*}, \quad (4.28)$$

$$B_{03}^k = e^{i\varphi_2} \left[\delta_{kj} - \frac{\widetilde{\text{Ra}} \widehat{P}_{kn} e_n e_j}{\widehat{q}_2^* \widehat{D}_{W_2}^* \widehat{D}_{\theta_2}^* + \widetilde{\text{Ra}}} \right] \frac{iH_2 B_j}{\widehat{q}_2^* \widehat{D}_{W_2}^* \widehat{D}_{H_2}^*}. \quad (4.29)$$

Здесь мы учли, что $\widehat{P}_{qs}(\kappa_1) e_q e_s = \widehat{P}_{qs}(\kappa_2) e_q e_s = 1$, так как $\vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_2 \perp \vec{e}$. Таким образом, в нулевом приближении по R вычислены мелкомасштабные поля, которые далее используем для вычисления их корреляторов и решения проблемы замыкания уравнений для крупномасштабных полей.

5. Замкнутые уравнения для крупномасштабных полей

Для замыкания системы уравнений (3.37)–(3.39), описывающей эволюцию крупномасштабных полей, необходимо вычислить корреляторы следующего вида:

$$\overline{v_0^k v_0^i} = \overline{v_{01}^k (v_{01}^i)^*} + \overline{(v_{01}^k)^* v_{01}^i} + \overline{v_{03}^k (v_{03}^i)^*} + \overline{(v_{03}^k)^* v_{03}^i} = T_{(1)}^{ki} + T_{(2)}^{ki}, \quad (5.1)$$

$$\overline{B_0^i B_0^k} = \overline{B_{01}^i (B_{01}^k)^*} + \overline{(B_{01}^i)^* B_{01}^k} + \overline{B_{03}^i (B_{03}^k)^*} + \overline{(B_{03}^i)^* B_{03}^k} = S_{(1)}^{ik} + S_{(2)}^{ik},$$

$$\overline{v_0^i B_0^j} = \overline{v_{01}^i (B_{01}^j)^*} + \overline{(v_{01}^i)^* B_{01}^j} + \overline{v_{03}^i (B_{03}^j)^*} + \overline{(v_{03}^i)^* B_{03}^j} = G_{(1)}^{ij} + G_{(2)}^{ij},$$

$$\overline{v_0^k T_0} = \overline{v_{01}^k (T_{01})^*} + \overline{(v_{01}^k)^* T_{01}} + \overline{v_{03}^k (T_{03})^*} + \overline{(v_{03}^k)^* T_{03}} = Q_{(1)}^{ki} + Q_{(2)}^{ki}. \quad (5.2)$$

Начнем с вычислений напряжений Рейнольдса: $\overline{v_0^k v_0^i} = T_{(1)}^{ki} + T_{(2)}^{ki}$. Для этого нам понадобятся формулы (4.24)–(4.25) и вид внешней спиральной силы, то есть формулы (4.18)–(4.19). Далее для простоты будем считать, что безразмерная амплитуда внешней спиральной силы $f_0 = 1$, тогда имеем:

$$T_{(1)}^{ki} = \frac{1}{|\widehat{q}_1|^2 |\widehat{D}_{W_1}|^2} \left\{ (A_k A_i^* + A_i A_k^*) - \widehat{a} A_z^* (e_i A_k + e_k A_i) - \right. \\ \left. - \widehat{a}^* A_z (e_i A_k^* + e_k A_i^*) + 2|\widehat{a}|^2 |A_z|^2 e_i e_k \right\}, \quad (5.3)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} |\widehat{q}_1|^2 &= \widehat{q}_1 \widehat{q}_1^* = \widehat{q}_1^* \widehat{q}_1 = \frac{(\text{Pm}^{-1} - (1 - W_1)^2 + \widetilde{Q} H_1^2)^2 + (1 - W_1)(1 + \text{Pm}^{-1})^2}{(1 + (1 - W_1)^2)(\text{Pm}^{-2} + (1 - W_1)^2)}, \\ |\widehat{D}_{W_1}|^2 &= \widehat{D}_{W_1}^* \widehat{D}_{W_1} = 1 + (1 - W_1)^2, \\ \widehat{a}^* &= \frac{\widetilde{\text{Ra}}}{\widehat{q}_1^* \widehat{D}_{W_1}^* \widehat{D}_{\theta_1}^* + \widetilde{\text{Ra}}}, \quad \widehat{a} = \frac{\widetilde{\text{Ra}}}{\widehat{q}_1 \widehat{D}_{W_1} \widehat{D}_{\theta_1} + \widetilde{\text{Ra}}}, \quad |\widehat{a}|^2 = \widehat{a} \widehat{a}^*, \quad |A_z|^2 = A_z^* A_z. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Аналогичный вид имеет выражение для $T_{(2)}^{ki}$:

$$T_{(2)}^{ki} = \frac{1}{|\widehat{q}_2|^2 |\widehat{D}_{W_2}|^2} \left\{ (B_k B_i^* + B_i B_k^*) - \widehat{b} B_z^* (e_i B_k + e_k B_i) - \widehat{b}^* B_z (e_i B_k^* + e_k B_i^*) + 2 |\widehat{b}|^2 |B_z|^2 e_i e_k \right\},$$

здесь

$$|\widehat{q}_2|^2 = \widehat{q}_2 \widehat{q}_2^* = \widehat{q}_2^* \widehat{q}_2 = \frac{(\text{Pm}^{-1} - (1 - W_2)^2 + \widetilde{Q} H_2^2)^2 + (1 - W_2)(1 + \text{Pm}^{-1})^2}{(1 + (1 - W_2)^2)(\text{Pm}^{-2} + (1 - W_2)^2)}, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} |\widehat{D}_{W_2}|^2 &= \widehat{D}_{W_2}^* \widehat{D}_{W_2} = 1 + (1 - W_2)^2, \\ \widehat{b}^* &= \frac{\widetilde{\text{Ra}}}{\widehat{q}_2^* \widehat{D}_{W_2}^* \widehat{D}_{\theta_2}^* + \widetilde{\text{Ra}}}, \quad \widehat{b} = \frac{\widetilde{\text{Ra}}}{\widehat{q}_2 \widehat{D}_{W_2} \widehat{D}_{\theta_2} + \widetilde{\text{Ra}}}, \quad |\widehat{b}|^2 = \widehat{b} \widehat{b}^*, \quad |B_z|^2 = B_z^* B_z. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Формулы (5.4)–(5.5), в пределе неэлектропроводной среды ($\sigma = 0$) и $\text{Pr} = 1$, были получены в работах [12, 13].

Корреляторы для магнитного поля $S_{(1)}^{ik} + S_{(2)}^{ik}$ легко находятся при использовании формул (4.28)–(4.29):

$$\begin{aligned} S_{(1)}^{ki} &= \frac{H_1^2}{|\widehat{q}_1|^2 |\widehat{D}_{W_1}|^2 |\widehat{D}_{H_1}|^2} \times \\ &\times \left\{ (A_i A_k^* + A_k A_i^*) - \widehat{a} A_z^* (e_k A_i + e_i A_k) - \widehat{a}^* A_z (e_i A_k^* + e_k A_i^*) + 2 |\widehat{a}|^2 |A_z|^2 e_i e_k \right\}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $|\widehat{D}_{H_1}|^2 = \widehat{D}_{H_1}^* \widehat{D}_{H_1} = \text{Pm}^{-2} + (1 - W_1)^2$,

$$\begin{aligned} S_{(2)}^{ki} &= \frac{H_2^2}{|\widehat{q}_2|^2 |\widehat{D}_{W_2}|^2 |\widehat{D}_{H_2}|^2} \times \\ &\times \left\{ (B_i B_k^* + B_k B_i^*) - \widehat{b} B_z^* (e_k B_i + e_i B_k) - \widehat{b}^* B_z (e_i B_k^* + e_k B_i^*) + 2 |\widehat{b}|^2 |B_z|^2 e_i e_k \right\}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $|\widehat{D}_{H_2}|^2 = \widehat{D}_{H_2}^* \widehat{D}_{H_2} = \text{Pm}^{-2} + (1 - W_2)^2$. Далее, используя формулы (4.24)–(4.25) и (4.28)–(4.29), получим выражения для смешанного коррелятора $G_{(1)}^{ik} + G_{(2)}^{ik}$:

$$G_{(1)}^{ik} = \frac{i\text{Pm}^{-1}H_1}{|\widehat{q}_1|^2|\widehat{D}_{W_1}|^2|\widehat{D}_{H_1}|^2} \left\{ (A_j A_i^* - A_i A_j^*) - \widehat{a} A_z^* (e_i A_j - e_j A_i) - \widehat{a}^* A_z (e_j A_i^* - e_i A_j^*) \right\} - \\ - \frac{(1 - W_1)H_1}{|\widehat{q}_1|^2|\widehat{D}_{W_1}|^2|\widehat{D}_{H_1}|^2} \left\{ (A_j A_i^* + A_i A_j^*) - \widehat{a} A_z^* (e_i A_j + e_j A_i) - \widehat{a}^* A_z (e_j A_i^* + e_i A_j^*) + \right. \\ \left. + 2|\widehat{a}|^2|A_z|^2 e_i e_j \right\}, \quad (5.9)$$

$$G_{(2)}^{ij} = \frac{i\text{Pm}^{-1}H_2}{|\widehat{q}_2|^2|\widehat{D}_{W_2}|^2|\widehat{D}_{H_2}|^2} \left\{ (B_j B_i^* - B_i B_j^*) - \widehat{b} B_z^* (e_i B_j - e_j B_i) - \widehat{b}^* B_z (e_j B_i^* - e_i B_j^*) \right\} - \\ - \frac{(1 - W_2)H_2}{|\widehat{q}_2|^2|\widehat{D}_{W_2}|^2|\widehat{D}_{H_2}|^2} \left\{ (B_j B_i^* + B_i B_j^*) - \widehat{b} B_z^* (e_i B_j + e_j B_i) - \widehat{b}^* B_z (e_j B_i^* + e_i B_j^*) + \right. \\ \left. + 2|\widehat{b}|^2|B_z|^2 e_i e_j \right\}. \quad (5.10)$$

Простой заменой индексов $i \rightarrow n$, $j \rightarrow i$ мы получим аналогичные выражения для $G_{(1)}^{ni}$ и $G_{(2)}^{ni}$.

Так как нас интересует эволюция крупномасштабных полей \vec{W} и \vec{H} , то с учетом геометрии задачи (см. уравнения (3.42), (3.43)) нам необходимо знать следующие компоненты напряжений Рейнольдса:

$$\begin{aligned} T_{(1)}^{31} + T_{(2)}^{31}, \quad T_{(1)}^{32} + T_{(2)}^{32}, \quad S_{(1)}^{31} + S_{(2)}^{31}, \quad S_{(1)}^{32} + S_{(2)}^{32}, \\ G_{(1)}^{13} + G_{(2)}^{13}, \quad G_{(1)}^{31} + G_{(2)}^{31}, \quad G_{(1)}^{23} + G_{(2)}^{23}, \quad G_{(1)}^{32} + G_{(2)}^{32}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Используя формулу (5.3), находим выражение для $T_{(1)}^{31}$, полагая при этом $k = 3$, $i = 1$:

$$T_{(1)}^{31} = \frac{1}{|\widehat{q}_1|^2|\widehat{D}_{W_1}|^2} \times \\ \times \left\{ (A_3 A_1^* + A_1 A_3^*) - \widehat{a} A_z^* (e_1 A_3 + e_3 A_1) - \widehat{a}^* A_z (e_1 A_3^* + e_3 A_1^*) + 2|\widehat{a}|^2|A_z|^2 e_1 e_3 \right\}, \quad (5.12)$$

$T_{(1)}^{31} = 0$, так как $e_1 = 0$ и $A_1 = A_1^* = 0$, $A_z = A_3$. Подобным образом вычисляется $T_{(2)}^{31}$ при использовании (5.5), где $k = 3$, а $i = 1$, то есть

$$T_{(2)}^{31} = \frac{1}{|\widehat{q}_2|^2|\widehat{D}_{W_2}|^2} \times \\ \times \left\{ (B_3 B_1^* + B_1 B_3^*) - \widehat{b} B_z^* (e_1 B_3 + e_3 B_1) - \widehat{b}^* B_z (e_1 B_3^* + e_3 B_1^*) + 2|\widehat{b}|^2|B_z|^2 e_1 e_3 \right\}, \\ B_z = B_3. \quad (5.13)$$

Учитывая, что $B_3 B_1^* + B_1 B_3^* = 0$ и $e_1 = 0$, формула (5.13) упрощается:

$$T_{(2)}^{31} = \frac{i}{4|\hat{q}_2|^2 |\hat{D}_{W_2}|^2} (\hat{b}^* - \hat{b}), \quad (5.14)$$

или после подстановки (5.6) имеем

$$T_{(2)}^{31} = -\frac{i}{4} \frac{\widetilde{\text{Ra}}}{|\hat{q}_2|^2 |\hat{D}_{W_2}|^2} \left\{ \frac{\hat{q}_2^* \hat{D}_{W_2}^* \hat{D}_{\theta_2}^* - \hat{q}_2 \hat{D}_{W_2} \hat{D}_{\theta_2}}{|\hat{q}_2 \hat{D}_{W_2} \hat{D}_{\theta_2} + \widetilde{\text{Ra}}|^2} \right\}. \quad (5.15)$$

Полагая в формулах (5.3) и (5.5) индексы, соответственно, $k = 3$ и $i = 2$, находим выражения для $T_{(1)}^{31}$ и $T_{(2)}^{31}$:

$$T_{(1)}^{32} = \frac{1}{|\hat{q}_1|^2 |\hat{D}_{W_1}|^2} \times \\ \times \left\{ (A_3 A_2^* + A_2 A_3^*) - \hat{a} A_z^* (e_2 A_3 + e_3 A_2) - \hat{a}^* A_z (e_2 A_3^* + e_3 A_2^*) + 2|\hat{a}|^2 |A_z|^2 e_2 e_3 \right\}; \quad (5.16)$$

с учетом $e_2 = 0$, $A_3 A_2^* + A_2 A_3^* = 0$ и формулы (5.4) вид выражения (5.16) упростится:

$$T_{(1)}^{32} = \frac{i}{4} \frac{\widetilde{\text{Ra}}}{|\hat{q}_1|^2 |\hat{D}_{W_1}|^2} \left\{ \frac{\hat{q}_1^* \hat{D}_{W_1}^* \hat{D}_{\theta_1}^* - \hat{q}_1 \hat{D}_{W_1} \hat{D}_{\theta_1}}{|\hat{q}_1 \hat{D}_{W_1} \hat{D}_{\theta_1} + \widetilde{\text{Ra}}|^2} \right\}. \quad (5.17)$$

Компонента $T_{(2)}^{32}$ равна нулю в силу того, что $e_2 = 0$ и $B_2 = B_2^* = 0$:

$$T_{(2)}^{32} = \frac{1}{|\hat{q}_2|^2 |\hat{D}_{W_2}|^2} \times \\ \times \left\{ (B_3 B_2^* + B_2 B_3^*) - \hat{b} B_z^* (e_2 B_3 + e_3 B_2) - \hat{b}^* B_z (e_2 B_3^* + e_3 B_2^*) + 2|\hat{b}|^2 |B_z|^2 e_2 e_3 \right\}. \quad (5.18)$$

В формулах (5.7) и (5.8) положим индексы $k = 3$, $i = 1$, тогда нетрудно найти выражения для компонент $S_{(1)}^{31}$ и $S_{(2)}^{31}$

$$S_{(1)}^{31} = \frac{H_1^2}{|\hat{q}_1|^2 |\hat{D}_{W_1}|^2 |\hat{D}_{H_1}|^2} \times \\ \times \left\{ (A_3 A_1^* + A_1 A_3^*) - \hat{a} A_z^* (e_k A_i + e_i A_k) - \hat{a}^* A_z (e_1 A_3^* + e_3 A_1^*) + 2|\hat{a}|^2 |A_3|^2 e_1 e_3 \right\} = 0, \quad (5.19)$$

так как $e_1 = 0$ и $A_1 = A_1^* = 0$;

$$S_{(2)}^{31} = \frac{H_2^2}{|\hat{q}_2|^2 |\hat{D}_{W_2}|^2 |\hat{D}_{H_2}|^2} \times \\ \times \left\{ (B_3 B_1^* + B_1 B_3^*) - \hat{b} B_3^* (e_1 B_3 + e_3 B_1) - \hat{b}^* B_3 (e_3 B_1^* + e_1 B_3^*) + 2|\hat{b}|^2 |B_z|^2 e_3 e_1 \right\}. \quad (5.20)$$

Учитывая $B_3 B_1^* + B_1 B_3^* = 0$ и $e_1 = 0$, (5.20) примет вид

$$S_{(2)}^{31} = \frac{i}{4} \frac{H_2^2 \widetilde{\text{Ra}}}{|\widehat{q}_2|^2 |\widehat{D}_{H_2}|^2 |\widehat{D}_{W_2}|^2} \left\{ \frac{\widehat{q}_2 \widehat{D}_{W_2} \widehat{D}_{\theta_2} - \widehat{q}_2^* \widehat{D}_{W_2}^* \widehat{D}_{\theta_2}^*}{|\widehat{q}_2 \widehat{D}_{W_2} \widehat{D}_{\theta_2} + \widetilde{\text{Ra}}|^2} \right\}. \quad (5.21)$$

Формулы для компонент $S_{(1)}^{32}$ и $S_{(2)}^{32}$ находятся из (5.7) и (5.8), считая при этом $k = 3$, $i = 2$. Тогда

$$S_{(1)}^{32} = \frac{H_1^2}{|\widehat{q}_1|^2 |\widehat{D}_{W_1}|^2 |\widehat{D}_{H_1}|^2} \times \\ \times \left\{ (A_3 A_2^* + A_2 A_3^*) - \widehat{a} A_3^* (e_2 A_3 + e_3 A_2) - \widehat{a}^* A_3 (e_3 A_2^* + e_2 A_3^*) + 2|\widehat{a}|^2 |A_3|^2 e_3 e_2 \right\},$$

здесь $A_3 A_2^* + A_2 A_3^* = 0$, $e_2 = 0$. Отсюда $S_{(1)}^{32}$ имеет следующий вид:

$$S_{(1)}^{32} = \frac{i}{4} \frac{H_1^2 \widetilde{\text{Ra}}}{|\widehat{q}_1|^2 |\widehat{D}_{W_1}|^2 |\widehat{D}_{H_1}|^2} \left\{ \frac{\widehat{q}_1^* \widehat{D}_{W_1}^* \widehat{D}_{\theta_1} - \widehat{q}_1 \widehat{D}_{W_1} \widehat{D}_{\theta_1}}{|\widehat{q}_1 \widehat{D}_{W_1} \widehat{D}_{\theta_1} + \widetilde{\text{Ra}}|^2} \right\}. \quad (5.22)$$

Компонента $S_{(2)}^{32}$ равна нулю, то есть $e_2 = 0$ и $B_2 = B_2^* = 0$:

$$S_{(2)}^{32} = \frac{H_2^2}{|\widehat{q}_2|^2 |\widehat{D}_{W_2}|^2 |\widehat{D}_{H_2}|^2} \times \\ \times \left\{ (B_3 B_2^* + B_2 B_3^*) - \widehat{b} B_3^* (e_2 B_3 + e_3 B_1) - \widehat{b}^* B_3 (e_3 B_2^* + e_2 B_3^*) + 2|\widehat{b}|^2 |B_3|^2 e_3 e_2 \right\} = 0. \quad (5.23)$$

Далее исходя из формул (5.9) и (5.10) при замене индексов i и j на $i = 1$ и $j = 3$, $i = 3$ и $j = 1$, $i = 2$ и $j = 3$, $i = 3$ и $j = 2$ получаем:

$$G_{(1)}^{13} = \frac{i \text{Pm}^{-1} H_1}{|\widehat{q}_1|^2 |\widehat{D}_{W_1}|^2 |\widehat{D}_{H_1}|^2} \left\{ (A_3 A_1^* - A_1 A_3^*) - \widehat{a} A_3^* (e_1 A_3 - e_3 A_1) - \widehat{a}^* A_3 (e_3 A_1^* - e_1 A_3^*) \right\} - \\ - \frac{(1 - W_1) H_1}{|\widehat{q}_1|^2 |\widehat{D}_{W_1}|^2 |\widehat{D}_{H_1}|^2} \left\{ (A_3 A_1^* + A_1 A_3^*) - \widehat{a} A_3^* (e_1 A_3 + e_3 A_1) - \widehat{a}^* A_3 (e_3 A_1^* + e_1 A_3^*) + \right. \\ \left. + 2|\widehat{a}|^2 |A_3|^2 e_1 e_3 \right\}, \quad (5.24)$$

$G_{(2)}^{13} = 0$, так как $e_1 = 0$ и $A_1 = A_1^* = 0$;

$$G_{(2)}^{13} = -\frac{1}{4} \frac{\text{Pm}^{-1} H_2 \widetilde{\text{Ra}}}{|\widehat{q}_2|^2 |\widehat{D}_{W_2}|^2 |\widehat{D}_{H_2}|^2} \left\{ \frac{\widehat{q}_2^* \widehat{D}_{W_2}^* \widehat{D}_{\theta_2} + \widehat{q}_2 \widehat{D}_{W_2} \widehat{D}_{\theta_2} + 2\widetilde{\text{Ra}}}{|\widehat{q}_2 \widehat{D}_{W_2} \widehat{D}_{\theta_2} + \widetilde{\text{Ra}}|^2} - \frac{2}{\widetilde{\text{Ra}}} \right\} + \\ + \frac{i}{4} \frac{(1 - W_2) H_2 \widetilde{\text{Ra}}}{|\widehat{q}_2|^2 |\widehat{D}_{W_2}|^2 |\widehat{D}_{H_2}|^2} \left\{ \frac{\widehat{q}_2^* \widehat{D}_{W_2}^* \widehat{D}_{\theta_2} - \widehat{q}_2 \widehat{D}_{W_2} \widehat{D}_{\theta_2}}{|\widehat{q}_2 \widehat{D}_{W_2} \widehat{D}_{\theta_2} + \widetilde{\text{Ra}}|^2} \right\}, \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned}
G_{(1)}^{31} = & \frac{i\text{Pm}^{-1}H_1}{|\hat{q}_1|^2|\hat{D}_{W_1}|^2|\hat{D}_{H_1}|^2} \{ (A_1A_3^* - A_3A_1^*) - \hat{a}A_3^* (e_3A_1 - e_1A_3) - \hat{a}^*A_3 (e_1A_3^* - e_3A_1^*) \} - \\
& - \frac{(1-W_1)H_1}{|\hat{q}_1|^2|\hat{D}_{W_1}|^2|\hat{D}_{H_1}|^2} \{ (A_1A_3^* + A_3A_1^*) - \hat{a}A_3^* (e_3A_1 + e_1A_3) - \hat{a}^*A_3 (e_1A_3^* + e_3A_1^*) + \\
& + 2|\hat{a}|^2|A_3|^2e_1e_3 \},
\end{aligned} \quad (5.26)$$

так как $e_1 = 0$ и $A_1 = A_1^* = 0$;

$$\begin{aligned}
G_{(2)}^{31} = & \frac{1}{4} \frac{\text{Pm}^{-1}H_2\widetilde{\text{Ra}}}{|\hat{q}_2|^2|\hat{D}_{W_2}|^2|\hat{D}_{H_2}|^2} \left\{ \frac{\hat{q}_2^*\hat{D}_{W_2}^*\hat{D}_{\theta_2}^* + \hat{q}_2\hat{D}_{W_2}\hat{D}_{\theta_2} + 2\widetilde{\text{Ra}}}{|\hat{q}_2\hat{D}_{W_2}\hat{D}_{\theta_2} + \widetilde{\text{Ra}}|^2} - \frac{2}{\widetilde{\text{Ra}}} \right\} + \\
& + \frac{i}{4} \frac{(1-W_2)H_2\widetilde{\text{Ra}}}{|\hat{q}_2|^2|\hat{D}_{W_2}|^2|\hat{D}_{H_2}|^2} \left\{ \frac{\hat{q}_2^*\hat{D}_{W_2}^*\hat{D}_{\theta_2}^* - \hat{q}_2\hat{D}_{W_2}\hat{D}_{\theta_2}}{|\hat{q}_2\hat{D}_{W_2}\hat{D}_{\theta_2} + \widetilde{\text{Ra}}|^2} \right\},
\end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned}
G_{(1)}^{23} = & \frac{1}{4} \frac{\text{Pm}^{-1}H_1\widetilde{\text{Ra}}}{|\hat{q}_1|^2|\hat{D}_{W_1}|^2|\hat{D}_{H_{123}}|^2} \left\{ \frac{\hat{q}_1^*\hat{D}_{W_1}^*\hat{D}_{\theta_1}^* + \hat{q}_1\hat{D}_{W_1}\hat{D}_{\theta_1} + 2\widetilde{\text{Ra}}}{|\hat{q}_1\hat{D}_{W_1}\hat{D}_{\theta_1} + \widetilde{\text{Ra}}|^2} - \frac{2}{\widetilde{\text{Ra}}} \right\} - \\
& - \frac{i}{4} \frac{(1-W_1)H_1\widetilde{\text{Ra}}}{|\hat{q}_1|^2|\hat{D}_{W_1}|^2|\hat{D}_{H_{12}}|^2} \left\{ \frac{\hat{q}_1^*\hat{D}_{W_1}^*\hat{D}_{\theta_1}^* - \hat{q}_1\hat{D}_{W_1}\hat{D}_{\theta_1}}{|\hat{q}_1\hat{D}_{W_1}\hat{D}_{\theta_1} + \widetilde{\text{Ra}}|^2} \right\},
\end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned}
G_{(2)}^{23} = & \frac{i\text{Pm}^{-1}H_2}{|\hat{q}_2|^2|\hat{D}_{W_2}|^2|\hat{D}_{H_2}|^2} \{ (B_3B_2^* - B_2B_3^*) - \hat{b}B_3^* (e_2B_3 - e_3B_2) - \hat{b}^*B_3 (e_3B_2^* - e_2B_3^*) \} - \\
& - \frac{(1-W_2)H_2}{|\hat{q}_2|^2|\hat{D}_{W_2}|^2|\hat{D}_{H_2}|^2} \{ (B_3B_2^* + B_2B_3^*) - \hat{b}B_3^* (e_2B_3 + e_3B_2) - \hat{b}^*B_3 (e_3B_2^* + e_2B_3^*) + \\
& + 2|\hat{a}|^2|B_3|^2e_2e_3 \} = 0,
\end{aligned} \quad (5.29)$$

так как $e_2 = 0$ и $B_2 = B_2^* = 0$;

$$\begin{aligned}
G_{(1)}^{32} = & -\frac{1}{4} \frac{\text{Pm}^{-1}H_1\widetilde{\text{Ra}}}{|\hat{q}_1|^2|\hat{D}_{W_1}|^2|\hat{D}_{H_{123}}|^2} \left\{ \frac{\hat{q}_1^*\hat{D}_{W_1}^*\hat{D}_{\theta_1}^* + \hat{q}_1\hat{D}_{W_1}\hat{D}_{\theta_1} + 2\widetilde{\text{Ra}}}{|\hat{q}_1\hat{D}_{W_1}\hat{D}_{\theta_1} + \widetilde{\text{Ra}}|^2} - \frac{2}{\widetilde{\text{Ra}}} \right\} - \\
& - \frac{i}{4} \frac{(1-W_1)H_1\widetilde{\text{Ra}}}{|\hat{q}_1|^2|\hat{D}_{W_1}|^2|\hat{D}_{H_{12}}|^2} \left\{ \frac{\hat{q}_1^*\hat{D}_{W_1}^*\hat{D}_{\theta_1}^* - \hat{q}_1\hat{D}_{W_1}\hat{D}_{\theta_1}}{|\hat{q}_1\hat{D}_{W_1}\hat{D}_{\theta_1} + \widetilde{\text{Ra}}|^2} \right\},
\end{aligned} \quad (5.30)$$

$$G_{(2)}^{32} = \frac{i\text{Pm}^{-1}H_2}{|\hat{q}_2|^2|\hat{D}_{W_2}|^2|\hat{D}_{H_2}|^2} \left\{ (B_2B_3^* - B_3B_2^*) - \hat{b}B_3^* (e_3B_2 - e_2B_3) - \hat{b}^*B_3 (e_2B_3^* - e_3B_2^*) \right\} -$$

$$- \frac{(1 - W_2)H_2}{|\hat{q}_2|^2|\hat{D}_{W_2}|^2|\hat{D}_{H_2}|^2} \left\{ (B_2B_3^* + B_3B_2^*) - \hat{b}B_3^* (e_2B_3 + e_3B_2) - \hat{b}^*B_3 (e_3B_2^* + e_2B_3^*) + \right.$$

$$\left. + 2|\hat{a}|^2|B_3|^2e_2e_3 \right\}. \quad (5.31)$$

Для полученных здесь компонент корреляторов (5.15), (5.17), (5.21), (5.22), (5.25), (5.27), (5.28), (5.30) будут полезны следующие соотношения:

$$\hat{q}_2\hat{D}_{W_2}\hat{D}_{\theta_2} - \hat{q}_2^*\hat{D}_{W_2}^*\hat{D}_{\theta_2}^* = 2i(1 + \text{Pr}^{-1})(1 - W_2) + \tilde{Q}H_2^2 \left(\frac{2i(\text{Pm}^{-1} - \text{Pr}^{-1})(1 - W_2)}{\text{Pm}^{-2} + (1 - W_2)^2} \right), \quad (5.32)$$

$$\hat{q}_2^*\hat{D}_{W_2}^*\hat{D}_{\theta_2}^* + \hat{q}_2\hat{D}_{W_2}\hat{D}_{\theta_2} = 2(\text{Pr}^{-1} - (1 - W_2)^2) + \frac{2\tilde{Q}H_2^2(\text{Pr}^{-1}\text{Pm}^{-1} + (1 - W_2)^2)}{\text{Pm}^{-2} + (1 - W_2)^2}, \quad (5.33)$$

$$\left| \hat{q}_2\hat{D}_{W_2}\hat{D}_{\theta_2} + \widetilde{\text{Ra}} \right|^2 = |\hat{q}_2|^2|\hat{D}_{W_2}|^2|\hat{D}_{\theta_2}|^2 + \widetilde{\text{Ra}} \left(\hat{q}_2^*\hat{D}_{W_2}^*\hat{D}_{\theta_2}^* + \hat{q}_2\hat{D}_{W_2}\hat{D}_{\theta_2} \right) + \widetilde{\text{Ra}}^2 =$$

$$= \left[\frac{(\text{Pm}^{-1} - (1 - W_2)^2 + \tilde{Q}H_2^2)^2 + (1 - W_2)^2(1 + \text{Pm}^{-1})^2}{(1 + (1 - W_2)^2)(\text{Pm}^{-2} + (1 - W_2)^2)} \right] (1 + (1 - W_2)^2)(\text{Pr}^{-2} + (1 - W_2)^2) +$$

$$+ 2\widetilde{\text{Ra}} \left[(\text{Pr}^{-1} - (1 - W_2)^2) + \frac{\tilde{Q}H_2^2(\text{Pr}^{-1}\text{Pm}^{-1} + (1 - W_2)^2)}{\text{Pm}^{-2} + (1 - W_2)^2} \right] + \widetilde{\text{Ra}}^2. \quad (5.34)$$

Подставим формулы (5.32)–(5.34) в выражения для компонент $T_{(2)}^{31}$ и $T_{(1)}^{32}$, в результате получим:

$$T_{(2)}^{31} = - \frac{\widetilde{\text{Ra}}(1 + \text{Pm}^2\widetilde{W}_2^2)\widetilde{W}_2 \left[(1 + \text{Pr})(1 + \text{Pm}^2\widetilde{W}_2^2) + QH_2^2(\text{Pr} - \text{Pm}) \right]}{2 \left[(1 - \text{Pm}\widetilde{W}_2^2 + QH_2^2)^2 + \widetilde{W}_2^2(1 + \text{Pm})^2 \right]} \times$$

$$\times \left[\left((1 - \text{Pm}\widetilde{W}_2^2 + QH_2^2)^2 + \widetilde{W}_2^2(1 + \text{Pm})^2 \right) (1 + \text{Pr}^2\widetilde{W}_2^2) + \right. \quad (5.35)$$

$$+ 2\text{Ra} \left((1 - \text{Pr}\widetilde{W}_2^2) (1 + \text{Pm}^2\widetilde{W}_2^2) + QH_2^2(1 + \text{Pm}\widetilde{W}_2^2) \right) +$$

$$\left. + \text{Ra}^2(1 + \text{Pm}^2\widetilde{W}_2^2) \right]^{-1} = \alpha^{NL}\widetilde{W}_2,$$

$$T_{(1)}^{32} = - \frac{\widetilde{\text{Ra}}(1 + \text{Pm}^2\widetilde{W}_1^2)\widetilde{W}_1 \left[(1 + \text{Pr})(1 + \text{Pm}^2\widetilde{W}_1^2) + QH_1^2(\text{Pr} - \text{Pm}) \right]}{2 \left[(1 - \text{Pm}\widetilde{W}_1^2 + QH_1^2)^2 + \widetilde{W}_1^2(1 + \text{Pm})^2 \right]} \times$$

$$\times \left[\left((1 - \text{Pm}\widetilde{W}_1^2 + QH_1^2)^2 + \widetilde{W}_1^2(1 + \text{Pm})^2 \right) (1 + \text{Pr}^2\widetilde{W}_1^2) + \right. \quad (5.36)$$

$$+ 2\text{Ra} \left((1 - \text{Pr}\widetilde{W}_1^2) (1 + \text{Pm}^2\widetilde{W}_1^2) + QH_1^2(1 + \text{Pm}\widetilde{W}_1^2) \right) +$$

$$\left. + \text{Ra}^2(1 + \text{Pm}^2\widetilde{W}_1^2) \right]^{-1} = -\alpha^{NL}\widetilde{W}_1;$$

здесь $\widetilde{W}_1 = 1 - W_1$, $\widetilde{W}_2 = 1 - W_2$, $\alpha^{NL} = \alpha^{NL}(W_{1,2}, H_{1,2})$ — коэффициент нелинейного гидродинамического α -эффекта в электропроводящей среде с температурной стратификацией.

Сравнивая выражения (5.21) и (5.15), а также (5.22) и (5.17), находим связь $S_{(2)}^{31}$ с $T_{(2)}^{31}$ и $S_{(1)}^{32}$ с $T_{(1)}^{32}$, то есть

$$S_{(2)}^{31} = \frac{H_2^2 T_{(2)}^{31}}{\text{Pm}^{-2} + \widetilde{W}_2^2}, \quad S_{(1)}^{32} = \frac{H_1^2 T_{(1)}^{32}}{\text{Pm}^{-2} + \widetilde{W}_1^2}. \quad (5.37)$$

Для замыкания уравнений крупномасштабного магнитного поля (3.42) нам нужно вычислить разности $G_{(2)}^{13} - G_{(2)}^{31}$ и $G_{(1)}^{23} - G_{(1)}^{32}$. С учетом формул (5.25), (5.27), (5.28), (5.30) получим:

$$\delta G_{(2)} = G_{(2)}^{13} - G_{(2)}^{31} = -\frac{1}{2} \frac{\text{Pm}^{-1} H_2 \widetilde{\text{Ra}}}{|\widehat{q}_2|^2 |\widehat{D}_{W_2}|^2 |\widehat{D}_{H_2}|^2} \left\{ \frac{\widehat{q}_2^* \widehat{D}_{W_2}^* \widehat{D}_{\theta_2}^* + \widehat{q}_2 \widehat{D}_{W_2} \widehat{D}_{\theta_2} + 2\widetilde{\text{Ra}}}{|\widehat{q}_2 \widehat{D}_{W_2} \widehat{D}_{\theta_2} + \widetilde{\text{Ra}}|^2} - \frac{2}{\widetilde{\text{Ra}}} \right\}, \quad (5.38)$$

$$\delta G_{(1)} = G_{(1)}^{23} - G_{(1)}^{32} = \frac{1}{2} \frac{\text{Pm}^{-1} H_1 \widetilde{\text{Ra}}}{|\widehat{q}_1|^2 |\widehat{D}_{W_1}|^2 |\widehat{D}_{H_1}|^2} \left\{ \frac{\widehat{q}_1^* \widehat{D}_{W_1}^* \widehat{D}_{\theta_1}^* + \widehat{q}_1 \widehat{D}_{W_1} \widehat{D}_{\theta_1} + 2\widetilde{\text{Ra}}}{|\widehat{q}_1 \widehat{D}_{W_1} \widehat{D}_{\theta_1} + \widetilde{\text{Ra}}|^2} - \frac{2}{\widetilde{\text{Ra}}} \right\}. \quad (5.39)$$

После подстановки выражений (5.33)–(5.34) в формулы (5.38)–(5.39) последние примут вид

$$\begin{aligned} \delta G_{(2)} = & \frac{\text{Pm} H_2}{\left(1 - \text{Pm} \widetilde{W}_2^2 + Q H_2^2\right)^2 + \widetilde{W}_2^2 (1 + \text{Pm})^2} \times \\ & \times \left\{ 1 - \text{Ra} \left[\left(1 - \text{Pr} \widetilde{W}_2^2\right) + \frac{Q H_2^2 (1 + \text{Pr} \text{Pm} \widetilde{W}_2^2)}{(1 + \text{Pm}^2 \widetilde{W}_2^2)} + \text{Ra} \right] \times \right. \\ & \times \left[\left(\left(1 - \text{Pm} \widetilde{W}_2^2 + Q H_2^2\right)^2 + \widetilde{W}_2^2 (1 + \text{Pm})^2 \right) \frac{(1 + \text{Pr}^2 \widetilde{W}_2^2)}{(1 + \text{Pm}^2 \widetilde{W}_2^2)} + \right. \\ & \left. \left. + 2\text{Ra} \left[\left(1 - \text{Pr} \widetilde{W}_2^2\right) + \frac{Q H_2^2 (1 + \text{Pr} \text{Pm} \widetilde{W}_2^2)}{(1 + \text{Pm}^2 \widetilde{W}_2^2)} + \text{Ra}^2 \right]^{-1} \right] \right\} = \alpha_{H_2}^{NL} H_2, \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} G_{(1)} = & \frac{-\text{Pm} H_1}{\left(1 - \text{Pm} \widetilde{W}_1^2 + Q H_1^2\right)^2 + \widetilde{W}_1^2 (1 + \text{Pm})^2} \times \\ & \times \left\{ 1 - \text{Ra} \left[\left(1 - \text{Pr} \widetilde{W}_1^2\right) + \frac{Q H_1^2 (1 + \text{Pr} \text{Pm} \widetilde{W}_1^2)}{(1 + \text{Pm}^2 \widetilde{W}_1^2)} + \text{Ra} \right] \times \right. \\ & \times \left[\left(\left(1 - \text{Pm} \widetilde{W}_1^2 + Q H_1^2\right)^2 + \widetilde{W}_1^2 (1 + \text{Pm})^2 \right) \frac{(1 + \text{Pr}^2 \widetilde{W}_1^2)}{(1 + \text{Pm}^2 \widetilde{W}_1^2)} + \right. \\ & \left. \left. + 2\text{Ra} \left[\left(1 - \text{Pr} \widetilde{W}_1^2\right) + \frac{Q H_1^2 (1 + \text{Pr} \text{Pm} \widetilde{W}_1^2)}{(1 + \text{Pm}^2 \widetilde{W}_1^2)} + \text{Ra}^2 \right]^{-1} \right] \right\} = -\alpha_{H_1}^{NL} H_1. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Коэффициенты нелинейного магнитогидродинамического (или МГД) α -эффекта, ответственного за генерацию крупномасштабного магнитного поля, состоят из двух частей:

$$\alpha_{H_{1,2}}^{NL} = \alpha_{1,2}^{NL(1)} (1 - \text{Ra} \cdot f(W_{1,2}, H_{1,2})). \quad (5.42)$$

Первая часть, $\alpha_{H_{1,2}}^{NL(1)}$, обусловлена только действием внешней спиральной силы \vec{f}_0 , вторая часть коэффициента $\alpha_{H_{1,2}}^{NL}$ связана с наличием температурной стратификации $\text{Ra} \neq 0$, если

$$\frac{dT_{00}}{dz} \neq 0.$$

Таким образом, на основании проведенных в настоящем разделе вычислений компонент $T_{(2)}^{31}$, $T_{(1)}^{32}$, $S_{(2)}^{31}$, $S_{(1)}^{32}$, $\delta G_{(2)}$, $\delta G_{(1)}$ мы получим замкнутые уравнения для крупномасштабных полей скорости (W_1, W_2) и магнитного поля (H_1, H_2) в следующем виде:

$$\partial_T W_1 - \Delta W_1 + \nabla_Z \left[\alpha^{NL} (1 - W_2) \left(1 - \frac{H_2^2 \text{Pm} Q}{(1 + \text{Pm}^2 (1 - W_2)^2)} \right) \right] = 0, \quad (5.43)$$

$$\partial_T W_2 - \Delta W_2 + \nabla_Z \left[\alpha^{NL} (1 - W_1) \left(1 - \frac{H_1^2 \text{Pm} Q}{(1 + \text{Pm}^2 (1 - W_1)^2)} \right) \right] = 0, \quad (5.44)$$

$$\partial_T H_1 - \text{Pm}^{-1} \Delta H_1 - \nabla_Z (\alpha_{H_2}^{NL} H_2) = 0, \quad (5.45)$$

$$\partial_T H_2 - \text{Pm}^{-1} \Delta H_2 - \nabla_Z (\alpha_{H_1}^{NL} H_1) = 0. \quad (5.46)$$

Уравнения (5.43)–(5.46) описывают нелинейную динамику крупномасштабных полей в электропроводящей среде с неоднородностью по температуре. В пределе неэлектропроводной среды $\sigma = 0$, и уравнения (5.43)–(5.44) полностью совпадают с результатами работы [12, 13]. Как и в работе [13], мы рассмотрим вначале устойчивость малых возмущений полей (линейная теория), а затем исследуем вопрос о возможности существования стационарных структур.

6. Крупномасштабная неустойчивость и нелинейные вихревые структуры

Рассмотрим начальную стадию развития возмущений (W_1, W_2) и (H_1, H_2) . Тогда при малых значениях величин W_1 , W_2 и H_1 , H_2 уравнения (5.43)–(5.46) линеализуются и сводятся к следующей системе линейных уравнений:

$$\partial_T W_1 - \Delta W_1 + \alpha \nabla_Z W_2 = 0, \quad (6.1)$$

$$\partial_T W_2 - \Delta W_2 - \alpha \nabla_Z W_1 = 0, \quad (6.2)$$

$$\partial_T H_1 - \Delta H_1 - \alpha \nabla_Z H_2 = 0, \quad (6.3)$$

$$\partial_T H_2 - \Delta H_2 + \alpha \nabla_Z H_1 = 0, \quad (6.4)$$

где

$$\alpha = -\frac{\text{Ra}(4 - 2\text{Ra})}{(4 + \text{Ra}^2)^2} \quad \text{при} \quad \text{Pr} = 1, \quad (6.5)$$

$$\alpha_H = \frac{2\text{Pm}}{(1 + \text{Pm}^2)(4 + \text{Ra}^2)}. \quad (6.6)$$

Как видно из системы уравнений (6.1)–(6.4), при малых возмущениях полей происходит расщепление самосогласованной системы уравнений (5.43)–(5.46) на две пары уравнений для крупномасштабного поля \vec{W} и магнитного поля \vec{H} соответственно. Легко заметить, что первая пара уравнений (6.1)–(6.2) подобна уравнениям для гидродинамического α -эффекта [2, 4], благодаря которому происходит генерация крупномасштабных вихревых структур нетривиальной топологии, то есть $\vec{W} \text{ rot } \vec{W} \neq 0$. Вторая пара уравнений (6.3)–(6.4) описывает хорошо известный из теории динамо [19–26] α -эффект — усиление крупномасштабного магнитного поля мелкомасштабной спиральной турбулентностью. Отметим, что в рассматриваемой здесь линейной теории коэффициенты генерации α и α_H (см. (6.5), (6.6)) не зависят от амплитуд полей, а зависят только от характеристик среды.

Для исследования крупномасштабной неустойчивости, описываемой системой уравнений (6.1)–(6.4), выберем возмущения скорости W_1 , W_2 и поля H_1 , H_2 в виде плоских циркулярно-поляризованных волн:

$$W_1 = A_W \exp(\Gamma t) \sin KZ, \quad W_2 = B_W \exp(\Gamma t) \cos KZ, \quad (6.7)$$

$$H_1 = A_H \exp(\Gamma t) \sin KZ, \quad H_2 = B_H \exp(\Gamma t) \cos KZ. \quad (6.8)$$

Подставляя (6.7) в систему уравнений (6.1)–(6.2), а (6.8) — в систему (6.3)–(6.4), мы получим два инкремента неустойчивости:

$$\Gamma_1 = \pm \alpha K - K^2, \quad (6.9)$$

$$\Gamma_2 = \pm \alpha_H K - K^2 \text{Pm}^{-1}. \quad (6.10)$$

Растущее решение с первым инкрементом описывает генерацию спиральных вихревых структур. Максимум инкремента $\Gamma_{1\text{max}} = \frac{\alpha^2}{4}$ достигается при $K_{\text{max}} = \frac{\alpha}{2}$. Аналогично, из формулы (6.10), находим максимальный инкремент генерации крупномасштабного магнитного поля $\Gamma_{2\text{max}} = \frac{\alpha_H^2}{4} \text{Pm}$ при $K_{\text{max}} = \frac{\alpha_H}{2} \text{Pm}$.

Если внешняя сила имеет нулевую спиральность $\vec{F}_0 \text{ rot } \vec{F}_0 = 0$, то оба α -эффекта исчезнут: $\alpha=0$, $\alpha_H=0$. Кроме этого, при обращении в нуль градиента температуры гидродинамический α -эффект также исчезает, но магнитогидродинамический α -эффект остается. Другими словами, магнитное поле продолжает нарастать и в этих условиях.

Перейдем теперь к обсуждению нелинейной стадии. Естественно ожидать, что с ростом возмущений $W_{1,2}$, $H_{1,2}$ нелинейные коэффициенты α^{NL} и α_H^{NL} уменьшаются и неустойчивость стабилизируется. В результате образуются нелинейные вихревые спиральные структуры.

Для изучения таких стационарных структур рассмотрим стационарные решения нелинейной системы уравнений (5.43)–(5.46). Полагая $\partial_T W_1 = \partial_T W_2 = \partial_T H_1 = \partial_T H_2 = 0$

и интегрируя эти уравнения по Z , получим:

$$\frac{d\widetilde{W}_1}{dZ} = -\alpha^{NL}\widetilde{W}_2 \left(1 - \frac{QH_2^2\text{Pm}}{1 + \text{Pm}^2\widetilde{W}_2^2} \right) + C_1, \quad (6.11)$$

$$\frac{d\widetilde{W}_2}{dZ} = \alpha^{NL}\widetilde{W}_1 \left(1 - \frac{QH_1^2\text{Pm}}{1 + \text{Pm}^2\widetilde{W}_1^2} \right) + C_2, \quad (6.12)$$

$$\frac{1}{\text{Pm}} \frac{dH_1}{dZ} = -\alpha_H^{NL}H_2 + C_1^1, \quad (6.13)$$

$$\frac{1}{\text{Pm}} \frac{dH_2}{dZ} = \alpha_H^{NL}H_1 + C_2^2, \quad (6.14)$$

где C_1 , C_2 , C_1^1 и C_2^2 — произвольные постоянные интегрирования. Нелинейные коэффициенты генерации α^{NL} и α_H^{NL} являются функциями возмущений скорости \vec{W} и поля \vec{H} , явный вид которых определен формулами (5.35)–(5.36) и (5.40)–(5.41). Анализ системы уравнений (6.11)–(6.14) представляет собой довольно сложную задачу, поэтому примем ряд упрощений. Так, будем считать числа Прандтля равными единице, $\text{Pr} = \text{Pm} = 1$, а крупномасштабное поле скорости W_1 , W_2 совпадает с альфвеновской скоростью возмущений поля H_1 , H_2 :

$$\widetilde{W}_{1,2} = \pm H_{1,2} \sqrt{Q}, \quad (6.15)$$

или, в размерных переменных, $\widetilde{W}_{1,2} = \pm \frac{H_{1,2}}{\sqrt{4\pi\rho_{00}}}$. Используя соотношения (6.15), систему уравнений (6.11)–(6.14) можно упростить и привести к виду

$$\frac{d\widetilde{W}_1}{dZ} = \frac{\text{Ra}\widetilde{W}_2}{(1 + 4\widetilde{W}_2^2)(4\widetilde{W}_2^2 + (\text{Ra} + 1)^2)} + C_1 = \alpha^{NL}(\widetilde{W}_2)\widetilde{W}_2 + C_1, \quad (6.16)$$

$$\frac{d\widetilde{W}_2}{dZ} = -\frac{\text{Ra}\widetilde{W}_1}{(1 + 4\widetilde{W}_1^2)(4\widetilde{W}_1^2 + (\text{Ra} + 1)^2)} + C_2 = \alpha^{NL}(\widetilde{W}_1)\widetilde{W}_1 + C_1, \quad (6.17)$$

$$\frac{dH_1}{dZ} = -\frac{(1 + 4QH_2^2 + \text{Ra}(2\text{Ra} + 1)H_2)}{(1 + 4QH_2^2)(4QH_2^2 + (\text{Ra} + 1)^2)} + C_1^1 = -\alpha_H^{NL}(H_2)H_2 + C_1^1, \quad (6.18)$$

$$\frac{dH_2}{dZ} = -\frac{(1 + 4QH_1^2 + \text{Ra}(2\text{Ra} + 1)H_1)}{(1 + 4QH_1^2)(4QH_1^2 + (\text{Ra} + 1)^2)} + C_2^2 = -\alpha_H^{NL}(H_1)H_1 + C_2^2. \quad (6.19)$$

Легко заметить, что произошло расщепление системы (6.11)–(6.14) на две пары нелинейных уравнений для возмущений скорости (6.16)–(6.17) и магнитного поля (6.18)–(6.19). Эти уравнения можно записать в гамильтоновой форме:

$$\frac{dX_W}{dZ} = \frac{d\mathcal{H}_W}{dP_W}, \quad \frac{dP_W}{dZ} = -\frac{d\mathcal{H}_W}{dX_W}, \quad (6.20)$$

$$\frac{dX_H}{dZ} = \frac{d\mathcal{H}_H}{dP_H}, \quad \frac{dP_H}{dZ} = -\frac{d\mathcal{H}_H}{dX_H}, \quad (6.21)$$

вводя новые переменные $X_W = 1 - W_1$, $P_W = 1 - W_2$, $X_H = H_2$, $P_H = H_1$. В уравнениях (6.20)–(6.21) переменная Z играет роль времени. Гамильтониан поля скорости \mathcal{H}_W имеет вид

$$\mathcal{H}_W = U_w(P_W) + U_w(X_W) + C_1 P_W + C_2 X_W + C_3, \quad (6.22)$$

где входящая в гамильтониан функция $U_w(y)$ имеет вид

$$U_w(y) = \frac{1}{8(\text{Ra} + 2)} \ln \frac{1 + 4y}{1 + 4y + \text{Ra}(\text{Ra} + 2)}. \quad (6.23)$$

Гамильтониан магнитного поля \mathcal{H}_H принимает вид

$$\mathcal{H}_H = U_h(P_H) + U_h(X_H) + C_1^1 P_H + C_2^1 X_H + C_3^1, \quad (6.24)$$

где функция $U(x)_h$ имеет вид

$$U_h(x) = \frac{(1 - \text{Ra})}{8Q(\text{Ra} + 2)} \ln \frac{1 + x}{x + (1 + \text{Ra})^2} - \frac{1}{8Q} \ln(1 + x). \quad (6.25)$$

Уже сам факт гамильтоновости уравнений (6.20), (6.21) означает, что в фазовом пространстве могут наблюдаться неподвижные точки только двух типов: эллиптические и гиперболические неподвижные точки. Следствием этого априори можно ожидать появления в качестве нелинейных стационарных структур нелинейных волн, солитонов и кинков. Нелинейные волны наблюдаются в окрестности эллиптических точек, а солитоны и кинки соответствуют участкам сепаратрис, соединяющих, соответственно, одну или две гиперболические точки. При нулевых значениях постоянных $C_1 = C_2 = 0$ в фазовом пространстве присутствует только одна эллиптическая точка, и в этом случае присутствуют только нелинейные волны. Построенное численно стационарное решение, соответствующее нелинейной волне конечной амплитуды, приведено на рисунке 1. Возвращаясь к структуре уравнений (6.16), (6.17), легко заметить их вырожденный характер. Правая часть первого уравнения зависит только от \widetilde{W}_2 , а правая часть второго — только от \widetilde{W}_1 . Это ведет к простым ограничениям на неподвижные точки, существующие в фазовом пространстве. Так, в области параметров $C_1 = 0$ нуль правой части уравнения (6.16) достигается только в одной точке $\widetilde{W}_2 = 0$. В области $C_1 \neq 0$ и $-c < C_1 < c$ существует два корня. Здесь величина c определяется равенством

$$c = \frac{3\text{Ra} \sqrt{-12 - 6\text{Ra}^2 - 12\text{Ra} + 6\sqrt{16 + 20\text{Ra}^2 + 32\text{Ra} + \text{Ra}^4 + 4\text{Ra}^3}}}{(4 - \text{Ra}^2 - 2\text{Ra} + \sqrt{16 + 20\text{Ra}^2 + 32\text{Ra} + \text{Ra}^4 + 4\text{Ra}^3})} \times \\ \times \frac{1}{(4 + 5\text{Ra}^2 + 10\text{Ra} + \sqrt{16 + 20\text{Ra}^2 + 32\text{Ra} + \text{Ra}^4 + 4\text{Ra}^3})}.$$

Вне описанной выше полосы нули правой части уравнения (6.16) отсутствуют. Аналогично нуль правой части уравнения (6.17) в области параметров $C_2 = 0$ достигается только при $\widetilde{W}_1 = 0$. В полосе $-c < C_2 < c$ при $C_2 \neq 0$ два корня, и вне этой полосы корни отсутствуют. Это означает, что число неподвижных точек фазового портрета легко установить. Так, при $C_1 = C_2 = 0$ существует одна неподвижная точка, при $C_1 = 0$, а $C_2 \neq 0$ и $-c < C_2 < c$ — две неподвижные точки, как и при $C_2 = 0$, а $C_1 \neq 0$ и $-c < C_1 < c$. Наконец, при $C_1 \neq 0$ и $-c < C_1 < c$ и $C_2 \neq 0$ и $-c < C_2 < c$ существуют четыре неподвижные точки (см. рис. 2).

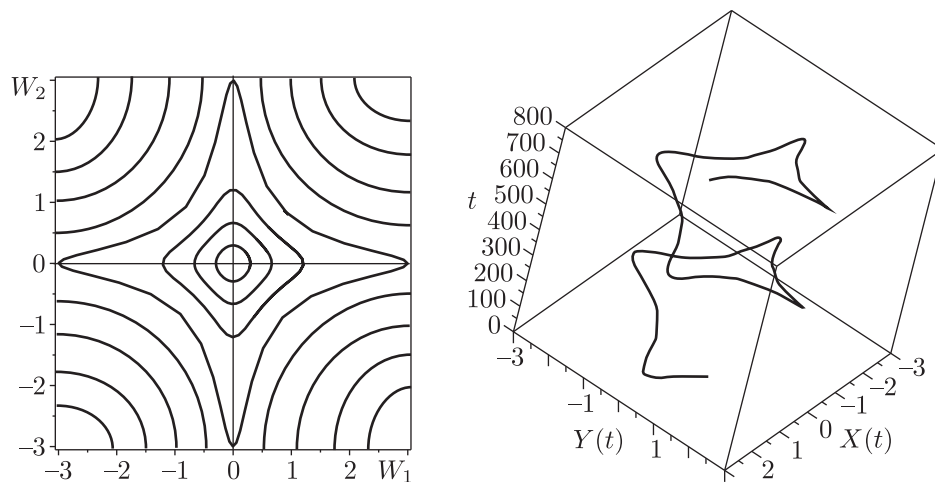


Рис. 1. Слева фазовый портрет системы уравнений (6.16), (6.17) при $C_1 = C_2 = 0$; справа решение, соответствующее нелинейной волне.

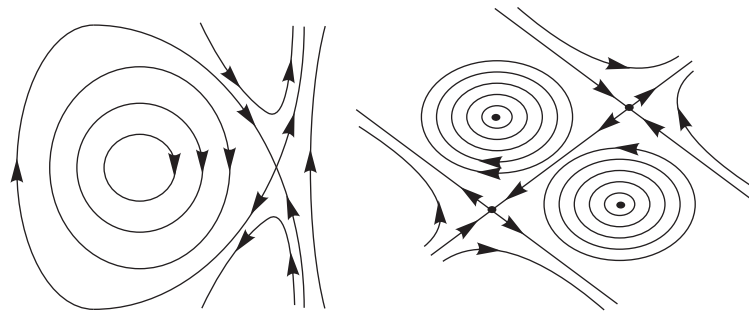


Рис. 2. Слева показан фазовый портрет в области параметров $C_1 \neq 0$ и $-c < C_1 < c$ и $C_2 \neq 0$ и $-c < C_2 < c$, при которых существуют четыре неподвижные точки. Справа — фазовый портрет с двумя неподвижными точками при $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$ и $-c < C_2 < c$. Сепаратриса, выходящая и входящая в гиперболическую точку, соответствует солитону.

В этой области кроме нелинейных волн возникает и кинк, соответствующий участку сепаратрисы, соединяющей две гиперболические точки. Пример такого нелинейного решения показан на рисунке 3.

Вполне аналогично устроен фазовый портрет и нелинейных уравнений (6.18), (6.19) для магнитных полей. Так, при $C_1^1 = C_2^2 = 0$ на фазовом портрете присутствует одна эллиптическая неподвижная точка. Сохраняется и приведенное выше условие существования двух и четырех неподвижных точек. Изменение претерпевает только значение постоянной c , которое хотя и вычислено аналитически, но имеет исключительно громоздкий вид. Поэтому его приводить не будем. Таким образом, как условия возникновения, так и типы стационарных структур магнитного поля аналогичны гидродинамическим структурам, приведенным выше.

В более общем случае система уравнений (5.35)–(5.36) уже не расщепляется на две подсистемы, так что подробный анализ системы уравнений в четырехмерном фазовом пространстве теряет свою наглядность и становится более громоздким и сложным. Детальный анализ стационарных решений в этом сложном случае выходит за рамки работы и будет проведен в дальнейшем.

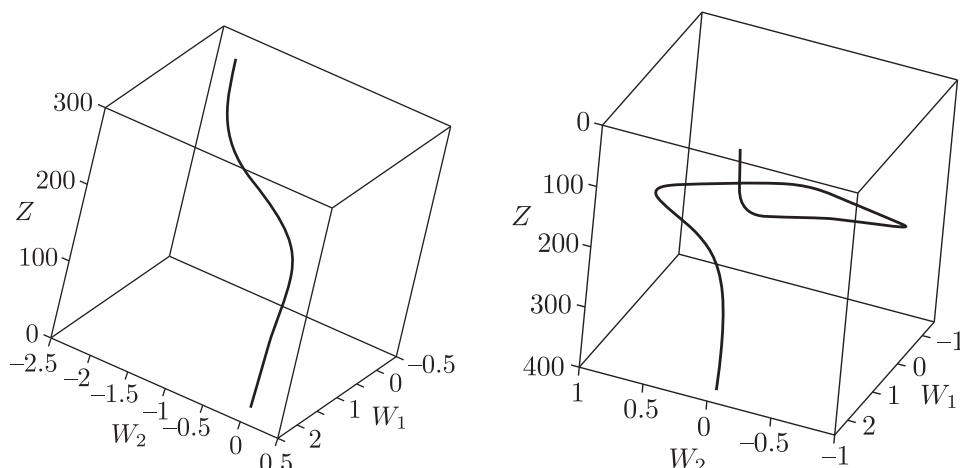


Рис. 3. Пример кинка при значениях $C_1 = 0.01$, $C_2 = 0.01$ в случае четырех неподвижных точек в фазовом пространстве и пример солитона в случае двух неподвижных точек при $C_1 = 0$, $C_2 = 0.01$. Они соответствуют фазовым портретам, показанным на рисунке 2.

7. Заключение

Полученная замкнутая система нелинейных уравнений описывает как линейную, так и нелинейную стадии нарастания гидродинамических течений и магнитных полей в проводящей среде. Это позволяет применять ее для объяснения возникновения и стабилизации крупномасштабных магнитных полей ряда космических объектов, в частности звезд. Также интересно применить ее для описания генерации крупномасштабных полей конвекцией в электропроводящей среде в недрах планет. Следует заметить, что несмотря на используемую асимптотическую технику, основанную на наличии мелкомасштабных осцилляций, следует ожидать, что результаты работы применимы и к турбулентным средам. В турбулентном случае присутствует целый спектр таких мелкомасштабных осцилляций. Качественные оценки линейной стадии для солнечных условий [25] позволяют установить хорошее совпадение характерных масштабов и времен возникающих гидродинамических структур с обнаруженными ранее экспериментально [37]. Это обстоятельство позволяет ожидать обнаружения и других стационарных гидродинамических структур (например, солитоноподобных структур в фотосфере Солнца).

Список литературы

- [1] Петвиашвили В. И., Похотелов О. А. Уединенные вихри в плазме и атмосфере. Москва: Энергоатомиздат, 1989. 200 с.
- [2] Абурджания Г. Д. Самоорганизация нелинейных вихревых структур и вихревой турбулентности в диспергирующих средах. Москва: КомКнига, 2006. 328 с.
- [3] Колесниченко А. В., Маров М. Я. Турбулентность и самоорганизация: Проблемы моделирования космических и природных сред. Москва: Бином, 2009. 648 с.
- [4] Онищенко О. Г., Похотелов О. А., Астафьева Н. М. Генерация крупномасштабных вихрей и зональных ветров в атмосферах планет // УФН, 2008, т. 178, № 6, с. 605–618.
- [5] Sommeria J., Meyers S. P., Swinney H. L. Laboratory simulation of Jupiters Great Red Spot // Nature, 1988, vol. 331, pp. 689–693.

- [6] Лахин В. П. Неустойчивости и волны во вращающейся плазме и турбулентная генерация регулярных структур: Дис. на соиск. уч. степени докт. физ.-мат. наук. Москва: Национальный исследовательский центр, Курчатовский институт, 2013. 257 с.
- [7] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Москва: Наука, 1972. 392 с.
- [8] Куклин В. М. Роль поглощения и диссипации энергии в формировании пространственных нелинейных структур в неравновесных средах // Укр. физ. журнал, 2004, т. 1, с. 49–81.
- [9] Шмерлин Б. Я., Калашник М. В. Конвективная неустойчивость Рэлея в присутствии фазовых переходов влаги: Формирование крупномасштабных вихрей и облачных структур // УФН, 2013, т. 183, № 5, с. 497–510.
- [10] Моисеев С. С., Руткевич П. Б., Тур А. В., Яновский В. В. Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью // ЖЭТФ, 1988, т. 94, № 2, с. 144–153.
- [11] Лупян Е. А., Мазуров А. А., Руткевич П. Б., Тур А. В. Генерация крупномасштабных вихрей под действием спиральной турбулентности конвективной природы // ЖЭТФ, 1992, т. 102, № 5, с. 1540–1552.
- [12] Моисеев С. С., Оганян К. Р., Руткевич П. Б., Тур А. В., Хоменко Г. А., Яновский В. В. Вихревое динамо в спиральной турбулентности // Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов: Сб. науч. тр. / Отв. ред. В. Г. Барьяхтар. Киев: Наукова думка, 1990. С. 280–382.
- [13] Levina G. V., Moiseev S. S., Rutkevitch P. B. Hydrodynamic alpha-effect in a convective system // Nonlinear instability, chaos and turbulence: Vol. 2 / L. Debnath, D. N. Riahi (Eds.). (Adv. Fluid Mech., vol. 25.) Southampton: WIT Press, 2000. P. 111–162.
- [14] Зимин В. Д., Левина Г. В., Моисеев С. С., Тур А. В. Возникновение крупномасштабных структур при турбулентной конвекции в подогреваемом снизу вращающемся слое // Докл. АН СССР, 1989, т. 309, с. 88–92.
- [15] Frishe U., She Z. S., Sulem P. L. Large scale flow driven by the anisotropic kinetic alpha effect // Phys. D, 1987, vol. 28, no. 3, pp. 382–392.
- [16] Дружинин О. А., Хоменко Г. А. Нелинейная теория гидродинамического альфа-эффекта в сжимаемой среде и обратный каскад энергии // Тр. Международн. конф. «Нелинейные и турбулентные процессы в физике»: Т. 2. Киев: Наукова думка, 1989. С. 83–86.
- [17] Rutkevitch P. B., Sagdeev R. Z., Tur A. V., Yanovsky V. V. Nonlinear dynamic theory of the α -effect in compressible fluid // Proc. of the 4th Internat. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics (Kiev, USSR, October 9–22, 1989): Vol. 2, V. G. Baryakhtar, V. M. Chernousenko, N. S. Erokhin (Eds.). Singapore: World Sci., 1990. P. 172–175.
- [18] Tur A. V., Yanovsky V. V. Large-scale instability in hydrodynamics with stable temperature stratification driven by small-scale helical force. arXiv:1204.5024 v.1 (2012).
- [19] Tur A. V., Yanovsky V. V. Non linear vortex structure in stratified driven by small-scale helical force // Open J. Fluid Dynam., 2013, vol. 3, no. 2, pp. 64–74.
- [20] Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. Москва: МЦНМО, 2007. 392 с.
- [21] Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Магнитные поля в астрофизике. Москва–Ижевск: РХД, Институт компьютерных исследований, 2006. 384 с.
- [22] Арнольд В. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Магнитное поле в движущейся проводящей жидкости // УМН, 1981, т. 36, № 5, с. 220–221.
- [23] Арнольд В. И. Эволюция магнитного поля под действием переноса и диффузии // УМН, 1983, т. 38, № 2, с. 226–227.
- [24] Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А. Проблемы динамо в астрофизике // Вспышки на звездах (сверхновые, рентгеновские источники, Солнце) / Р. А. Сюняев (ред.) (Итоги науки и техники. Сер. Астрономия, т. 21.) Москва: ВИНТИ, 1982. С. 151–187.
- [25] Копп М. И., Тур А. В., Яновский В. В. Крупномасштабная конвективная неустойчивость в электропроводящей среде с мелкомасштабной спиральной турбулентностью // ЖЭТФ, 2015, т. 147, № 4, с. 846–866.



- [26] Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. Москва: Мир, 1980. 285 с.
- [27] Паркер Ю. Беседы об электрических и магнитных полях в космосе. Москва – Ижевск: РХД, Институт компьютерных исследований, 2010. 207 с.
- [28] Соколов Д. Д., Степанов Р. А., Фрик П. Г. Динамо: На пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту // УФН, 2014, т. 184, № 3, с. 318–335.
- [29] Busse F. H. Generation of planetary by convection // Phys. Earth Planet. In., 1976, vol. 12, pp. 350–358.
- [30] Zang K. K., Busse F. H. Generation of magnetic fields by convection in a rotating spherical fluid shell of infinite Prandtl number // Phys. Earth Planet. In., 1990, vol. 59, pp. 202–222.
- [31] Jones C. A. Convection-driven geodynamo models // R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 2000, vol. 358, no. 1768, pp. 873–897.
- [32] Glatzmaier G. A., Roberts P. H. Simulating the geodynamo // Contemp. Phys., 1997, vol. 38, no. 4, pp. 269–288.
- [33] Долгинов А. З., Урпин В. А. Терромагнитная неустойчивость неоднородной плазмы // ЖЭТФ, 1979, т. 75, № 5, с. 1921–1932.
- [34] Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б., Рuzмайкин А. А. Турбулентное динамо в астрофизике. Москва: Наука, 1980. 354 с.
- [35] Вайнштейн С. И. Магнитные поля в космосе. Москва: Наука, 1983. 237 с.
- [36] Montgomery D., Chen H. Turbulent amplification of large-scale magnetic fields // Plasma Phys. Control. Fusion, 1984, vol. 26, no. 10, pp. 1199–1210.
- [37] Brandt P. N., Scharmer G. B., Ferguson S., Shine R. A., Tarbell T. D., Title A. M. Vortex flow in the solar photosphere // Nature, 1988, vol. 335, pp. 238–240.

Nonlinear dynamo theory

Mikhail I. Kopp^{1,2}, Anatoly V. Tur³, Vladimir V. Yanovsky^{1,2}

^{1,2}Institute for Single Crystals of NAS of Ukraine

Lenin Ave. 60, Kharkov, 61001, Ukraine

V. N. Karazin Kharkov National University

Svobody Sq. 4, Kharkov, 61022, Ukraine

³ Université de Toulouse [UPS], CNRS, Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie

9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France

¹michael.kopp@mail.ru, ²yanovsky@isc.kharkov.ua, ³Anatoly.Tour@irap.omp.eu

Using the asymptotic method of multiple scales construct nonlinear theory of large-scale structures in stratified conducting medium in the presence of small-scale oscillations of the velocity field and magnetic fields. Such small-scale stationary oscillations are generated by small external sources at low Reynolds numbers. The nonlinear system of equations describing the evolution of large-scale structure of the velocity field and the magnetic fields are obtained. The linear stage of evolution leads to the well known instability. We study the equations of non-linear instability and its stationary solutions.

MSC 2010: 76E25, 76E30

Keywords: stratified conducting medium, nonlinear system of equations, instability, large scale structures, multiscale method

Received December 30, 2014, accepted February 16, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 2, pp. 241–266 (Russian)

